

پاسخنامه ریاضی مثلثات



5- گزینه «ا»

ابتدا مخارج مشترک گرفته و ساده سازی می کنیم:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{\sin x(1+\cos x)} = 3$$

$$\frac{\sin^2 x + 1 + \cos^2 x + 2\cos x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 3$$

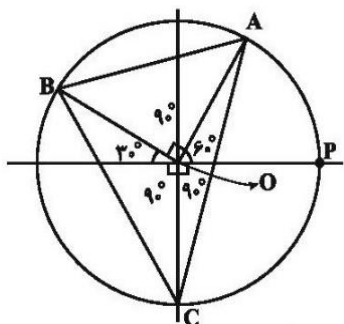
$$\Rightarrow \sin x = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{در ناحیه دوم}} \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

(مثال: (ریاضی، آ، صفحه های ۳۲ و ۳۶)

6- گزینه «د»

(فرشاد حسن زاده)

مثلث ABC را به ۳ مثلث AOB، AOC و BOC تقسیم می کنیم. اندازه OA، OB و OC برابر یک است.

اگر فرض کنیم $\hat{POA} = \alpha$ و $\hat{POB} = \beta$ داریم:

$$x_A = \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$y_B = \sin \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 15^\circ$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \hat{AOB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin \hat{AOC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 15^\circ = \frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \hat{BOC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(مثال: (ریاضی، آ، صفحه های ۲۹ و ۳۹)

7- گزینه «د»

(عمیر علیرزاده)

مختصات هر نقطه روی نمودار، در ضابطه تابع صدق می کند، بنابراین:

$$y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)} 0 = a + b \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = b \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) + a \Rightarrow 0 = a + b \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 0 = a - b\left(\frac{1}{2}\right)$$

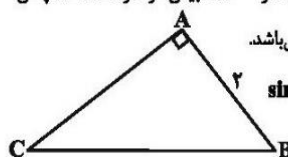
$$\Rightarrow 2a = b$$

تابع $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ با شروع از $x=0$ تابعی صعودی است. لذا با توجه به نمودارتابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ که در ابتدای آن صعودی است نتیجه می شود کهعلامت ضریب b مثبت بوده و ماکزیم مقدار تابع برابر $a + b \times 1$ خواهد بود.

1- گزینه «د»

(پویان طهرانیان)

در مثلث ABC چون $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 180^\circ$ و $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ از $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$ نتیجه می شود که $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$ وای چون $\cos \hat{B} = \frac{1}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ پس $45^\circ < \hat{B} < 90^\circ$ و رابطه $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$ نمی تواند درست باشد، چون $\hat{C} > 135^\circ$ و جمع زوایا از 180° بیش تر خواهد شد. پس

در نتیجه $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ می باشد.

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 10$$

$$\text{از طرفی } AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 4 + AC^2 = 100$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

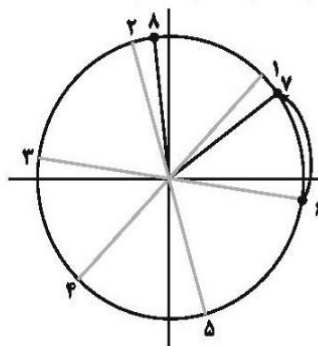
$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

(مثال: (ریاضی، آ، صفحه های ۱۹ و ۳۵) (ریاضی، ۲، صفحه های ۷۷ و ۸۷)

2- گزینه «د»

(بابک سلوات)

یک دور کامل دایره مثلثاتی برابر با $2\pi \approx 6.28$ رادیان است. همچنین هر یک رادیان حدود 57° درجه می باشد. با توجه به این دو نکته، محل تقریبی زوایای داده شده را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.

همانطور که در شکل می بینید داریم: $\sin 7 < \sin 1 < \sin 8$ 

(مثال: (ریاضی، آ، صفحه های ۳۹ و ۳۹) (ریاضی، ۲، صفحه های ۷۲ و ۷۶)

3- گزینه «ا»

(میثم صدیقی)

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{2\sin(90^\circ + 15^\circ) + \cos(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(360^\circ - 15^\circ) + 3\sin(360^\circ + 180^\circ - 15^\circ)} = \frac{2\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{-\sin 15^\circ + 3\sin 15^\circ}$$

صورت و مخارج را بر $\sin 15^\circ$ تقسیم می کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{2\cot 15^\circ - 1}{-1 + 3} = \frac{2a - 1}{2}$$

(مثال: (ریاضی، ۲، صفحه های ۷۷ و ۸۷)

4- گزینه «د»

(سروش مؤنثی)

طول BP برابر $\sin \theta$ و طول AP برابر $\tan \theta$ است پس طول AB برابر $\tan \theta - \sin \theta$ خواهد بود.

(مثال: (ریاضی، آ، صفحه های ۳۹ و ۳۹) (ریاضی، ۲، صفحه های ۳۷ و ۴۱)

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = -\frac{7}{8}$$

$$\frac{a=1}{|b|=\frac{1}{2}} \rightarrow f\left(\frac{14\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

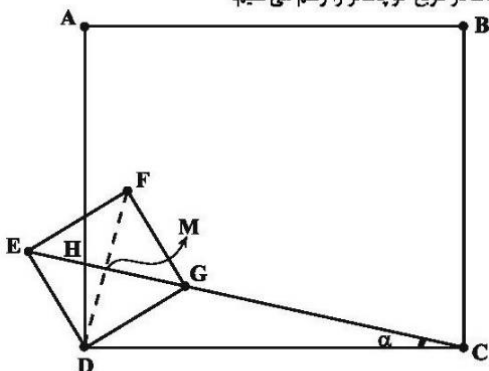
توجه: از $|b| = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود $b = \pm \frac{1}{2}$ و داریم: $\cos\left(\pm \frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

(مثال: (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۸ و ۹۳) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶ و ۳۰ و ۳۱)

(علی‌اصغر شریفی)

10- گزینه «۴»

قطر DF در مربع کوچک‌تر را رسم می‌کنیم.



با توجه به آن که قطرهای مربع با هم برابر و برهم عمود هستند، داریم:

$$CM = CG + GM = 2DM + DM = 3DM \Rightarrow \tan \alpha = \frac{DM}{CM} = \frac{1}{3}$$

$$\Delta DHC: DH = \tan \alpha \times CD = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

(مثال: (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۹ و ۳۵)

(فرشاد مسن‌زاده)

11- گزینه «۳»

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) = \tan^2 x \sin^2 x$$

$$\frac{\tan^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ}{\tan^2 18^\circ \cdot \sin^2 18^\circ} = 1$$

(مثال: (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ و ۴۶)

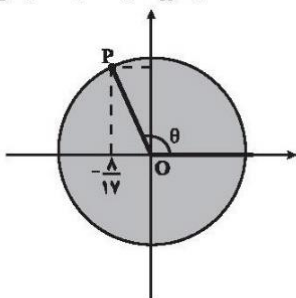
(ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۸۷)

پس:

12- گزینه «۱»

طول نقطه P منفی و عرض آن مثبت است پس، P در ناحیه دوم قرار دارد.

از طرفی می‌دانیم مختصات نقطه P به صورت $(\cos \theta, \sin \theta)$ می‌باشد پس داریم:



$$\cos \theta = -\frac{1}{5} \text{ و در نتیجه } \sin \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan \theta = \frac{-1/5}{1/5} = -1 \text{ و } \cot \theta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$r = a + b(1) \Rightarrow a + b = r$$

از حل دستگاه $a = 1, b = 2$ به دست می‌آید.

$$y = 1 + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

(مثال: (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۸ و ۹۳) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶ و ۳۰ و ۳۱)

(سید جواد نظری)

8- گزینه «۲»

روش اول: ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = -3 \cot\left(2\pi x + \frac{7\pi}{4}\right) + 1 = 3 \tan\left(2\pi x\right) + 1$$

می‌دانیم که تابع $\tan x$ در بازه‌هایی به فرم $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ اکیدا صعودی

است حال با توجه به ضابطه تابع، برای بررسی تابع فقط کافی است که نقاط دامنه

تابع را در $\frac{1}{2\pi}$ ضرب کنیم. توجه شود که در ضابطه تابع، ضریب ۳ و عدد ثابت ۱،

روی برد تابع اثر می‌کنند و دامنه تابع را تحت تأثیر قرار نمی‌دهند. پس:

$$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{2\pi} = \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{2\pi} = \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

..

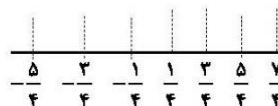
بنابراین تابع مورد نظر در بازه‌هایی به فرم $\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{4}, \frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)$ اکیدا صعودی خواهد

بود که به ازای $k = 3$ ، تابع مورد نظر در بازه $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$ این ویژگی را خواهد

داشت.

روش دوم: دوره تناوب $\tan mx$ به صورت $\frac{\pi}{|m|}$ است. پس $T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ حال

خطوط مجانب را رسم می‌کنیم:



(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ و ۳۱)

(سید جواد نظری)

9- گزینه «۲»

نمودار تابع، بر خط $y = \frac{1}{4}$ مماس می‌باشد. بنابراین بیشترین مقدار یا کمترین

مقدار تابع برابر $\frac{1}{4}$ است پس:

$$y_{\max} = a + \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$y_{\min} = a - \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 1$$

از طرفی دوره تناوب تابع برابر 4π است یعنی:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

حال با توجه به مقادیر به دست آمده برای a حاصل $f\left(\frac{14\pi}{3}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{a=-\frac{1}{4}}{|b|=\frac{1}{2}} \rightarrow f\left(\frac{14\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2 \sin(\pi - \theta) + \tan\left(\frac{11\pi}{5} + \theta\right) = -2 \sin \theta - \cot \theta$$

$$= -2\left(\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-30}{17} + \frac{8}{15} = \frac{-314}{255}$$

(مثال: ۱، صفحه‌های ۳۶ و ۳۷)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۸۷)

13 - گزینه «۳»

(پایک سارات)

با توجه به نمودار $f(x) = -2 \cos 2x$ می‌باشد، پس $f(25^\circ) = -2 \cos 50^\circ$.
حال عبارت A را ساده‌سازی می‌کنیم:

$$A = \frac{(\sin 80^\circ) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1 + \cos 80^\circ}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} (2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ)}{\sqrt{2} \cos 40^\circ} = -\sin 40^\circ$$

$$\frac{f(25^\circ)}{A} = \frac{-2 \cos 50^\circ}{-\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 2$$

توجه کنید در ساده‌سازی مخرج عبارت A از رابطه $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ استفاده شد.

(مثال: ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۹۳)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

14 - گزینه «۴»

(شهرام ولایی)

با استفاده از اتحاد $\cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ داریم:

$$(2 \cos^2 x) (2 \cos^2 2x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x \cos^2 2x = \frac{1}{16} \xrightarrow{\times \sin^2 x} \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 2x = \frac{1}{16} \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16} \sin^2 2x = \frac{1}{16} \sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = \sin x \\ \sin 2x = -\sin x = \sin(-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 2x = (2k+1)\pi - x \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 2x = (2k+1)\pi + x \Rightarrow x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{5} + \frac{9\pi}{5} = 2\pi \quad \text{بزرگترین جوابها هستند.} \quad x = \frac{9\pi}{5} \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{5} \quad \text{کوچکترین و}$$

(مثال: ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۸)

15 - گزینه «۲»

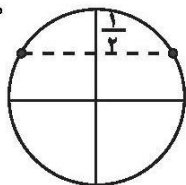
(اکبر کلامعلی)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - m \sin x - \cos x + \frac{m}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2 \cos x - m) - \frac{1}{2} (2 \cos x - m) = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x - m) \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{دو جواب دارد.}$$



$$2 \cos x - m = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{m}{2} \Rightarrow \text{نباید جواب داشته باشد.}$$

$$\left|\frac{m}{2}\right| > 1 \Rightarrow |m| > 2$$

(مثال: ۲، صفحه‌های ۳۲ و ۳۸)

16 - گزینه «۳»

(علی اصغر شریفی)

ابتدا معادله داده شده را ساده می‌کنیم:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x = k \sin 2x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x = k \sin 2x$$

$$\Rightarrow 2 + 2(\sin x + \cos x) = (2k - 1) \sin 2x$$

چون x در ربع اول است، پس $\sin x$ و $\cos x$ مثبت هستند، بنابراین:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin 2x} \Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{1 + \sin 2x}$$

با جایگذاری $t = \sin 2x$ در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$2 + 2\sqrt{1+t} = (2k-1)t$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{1+t}+1) = (2k-1)(\sqrt{1+t}-1)(\sqrt{1+t}+1)$$

$$\Rightarrow 2 = (2k-1)(\sqrt{1+t}-1) \Rightarrow \sqrt{1+t}-1 = \frac{2}{2k-1}$$

با توجه به آن که $0 < 2x < \pi$ پس $0 < \sin 2x \leq 1$:

$$0 < t \leq 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \sqrt{1+t}-1 \leq \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2}{2k-1} \leq \sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{2k-1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow k \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

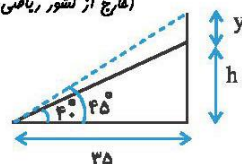
$$\approx \frac{3+2 \times 1.41}{2} = 2.91$$

پس به ازای $k=3$ معادله جواب ندارد.

(مثال: ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۸)

17- گزینه «۳»

(خارج از کشور ریاضی-۹۳)



$$\begin{cases} \tan 45^\circ = \frac{y+h}{35} = 1 \\ \tan 40^\circ = \frac{h}{35} = 0.8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{35} + \frac{h}{35} = 1 \Rightarrow \frac{y}{35} + 0.8 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{35} = 0.2 \Rightarrow y = 7$$

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۵)

18- گزینه «۳»

(خارج از کشور ریاضی-۹۹)

ابتدا از رابطه $\cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1$ مقدار $\sin \hat{C}$ را حساب می‌کنیم:

$$1 + \cot^2 \hat{C} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sin^2 \hat{C} = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{2}{3}$$

از طرفی در مثلث AHC داریم:

$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = 64$$

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۵ و ۳۲ و ۳۶)

19- گزینه «۱»

(خارج از کشور تهری-۹۸)

با استفاده از فرمول‌های $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right)$$

$$= \frac{\tan x}{\left| \frac{1}{\cos x} \right|} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\cos x} (\cos x \times \frac{\cos x}{\sin x})$$

$$= -\cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

تذکر: زاویه x در ربع دوم $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$ قرار دارد و کسینوس آن منفی است.

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۲ و ۳۶)

20- گزینه «۱»

(خارج از کشور تهری-۹۲)

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$= \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = -\sin^2 x \cos^2 x = -(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۲ و ۳۶)

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶)

21- گزینه «۱»

(خارج از کشور تهری-۹۵)

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}) = -\cot \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۸۷)

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

22- گزینه «۲»

(خارج از کشور تهری-۹۷)

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{1 + \cos x} = 0$$

$$\sin^2 x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = -\sin^2 x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} & \text{ق ق} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{3} & \text{ق غ} \end{cases}$$

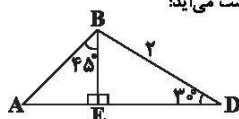
* به ازای $\cos x$ ، $x = 2k\pi + \pi$ برابر ۱- است که مخرج کسر برابر صفر می‌شود.

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۸)

23- گزینه «۲»

(اکبر کلامکی)

با توجه به تساوی $BC = FE$ اگر مثلث ABF را به اندازه FE به پایین منتقل کنیم مثلث ABD بدست می‌آید:



$$\begin{aligned} \Delta BDE : \quad & \sin 30^\circ = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{2} \Rightarrow BE = 1 \\ & \angle ABE = 45^\circ \Rightarrow AE = BE = 1 \\ & \text{رابطه فیثاغورس} \Rightarrow ED = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \\ & \Rightarrow AD = ED + AE = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BD \cdot AD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (2)(\sqrt{3} + 1) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۵)

24- گزینه «۲»

(مثنی تهری)

با ساده کردن رابطه داده شده داریم:

$$\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \times \tan \theta - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\sin^2 \theta} \times \tan \theta = 1$$

تفاوت در ناحیه‌های اول و سوم مثبت است. (I) $\Rightarrow \tan \theta > 0 \Rightarrow \sin \theta > 0$ طبق دایره مثلثاتی چون $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ است، لذا عبارت $3 - 2 \cos \theta$ همواره مثبت است زیرا $1 \leq 3 - 2 \cos \theta \leq 5$

پس مخرج عبارت $\frac{\sin \theta}{3 - 2 \cos \theta} < 0$ مثبت است پس باید $\sin \theta < 0$ باشد و

سینوس در ناحیه‌های سوم و چهارم منفی است. (II)

بنابراین از (I) و (II) نتیجه می‌شود که θ در ناحیه سوم دایره مثلثاتی واقع است.

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۳۶ و ۱۴۶)

29 - گزینه «ا»

(اکبر کلامعلی)

$$\frac{a}{\tan x} = \frac{1}{1 - \cos^2 x} \xrightarrow{\cos x \neq 0} \frac{a \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$\xrightarrow{\sin x \neq 0} a \cos x = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \Rightarrow \sqrt{\sin x} \cos x = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{a^2} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{12}} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{13\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{17\pi}{12} = \frac{35\pi}{12}$$

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

30 - گزینه «د»

(سپار داوطلب)

می‌دانیم که اگر $\sin \theta = 1$ شود آن‌گاه $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، بنابراین داریم: $(k \in \mathbb{Z})$

$$\pi \cos^2 x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^2 x = 2k + \frac{1}{2}$$

بمازای فقط $k=0$ رابطه برقرار است.

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

31 - گزینه «د»

(سرورش مونیکی)

$x - \frac{\pi}{4}$ در ربع چهارم است؛ $x + \frac{7\pi}{4}$ همان $x + \frac{3\pi}{4}$ و در ربع چهارم است؛ $x - \frac{5\pi}{4}$ و $x + \pi$ هر دو ربع سوم هستند.

$$\frac{-\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x + \cos^2 x} \div \frac{\cos x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{-1 - \tan x}{1 + \tan x + \cos^2 x}$$

حالا با $\tan x = 2$ داریم $\frac{1}{\cos^2 x} = 5$ پس $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 5$

$$\frac{-1-2}{5+2+\frac{1}{5}} = \frac{-3}{\frac{26}{5}} = \frac{-15}{26}$$

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

32 - گزینه «ب»

(یغما کلانتریان)

$$y = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\frac{1}{2}$$

اولین ریشه منفی: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

دومین ریشه منفی: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x_A = -\pi$

$$\Rightarrow x_B = 2(2\pi) - \pi = 3\pi$$

$$\Rightarrow x_A + x_B = 2\pi$$

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ و ۳۸)

25 - گزینه «د»

(ویدر ون آباری)

با ساده کردن رابطه داده شده داریم:

$$f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{4}kx - \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow f(x) = -\cot\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}kx\right)$$

$$f(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}kx\right)$$

با توجه به تقارن نمودار داریم:

$$T = 4 - (-4) = 8 \Rightarrow \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}|k|} = 8 \Rightarrow |k| = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{4} \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

توجه: در نمودار $\tan(x)$ چون قرینه‌ای انجام نگرفته پس باید $k < 0$ تا اثر آن با منفی بیرون حذف شود.

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۷۷ و ۱۷۸)

26 - گزینه «د»

(مینی نوری)

تابع $f(x) = a \sin x + b$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + b$ و مقدار مینیمم $-|a| + b$ است و چون f در بازه $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ نزولی است، بنابراین $a < 0$ است. لذا

$$R_f = [-1, 3] \Rightarrow \begin{cases} \min = -1 \Rightarrow -|a| + b = -1 \\ \max = 3 \Rightarrow |a| + b = 3 \end{cases}$$

داریم:

$$\xrightarrow{a < 0} \begin{cases} a + b = -1 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع g به صورت زیر است:

$$g(x) = (b - a) \cos x \Rightarrow g(x) = (1 - (-2)) \cos x$$

$$\Rightarrow g(x) = 3 \cos x \Rightarrow \begin{cases} \min = -|3| + 0 = -3 \\ \max = |3| + 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_g = [-3, 3]$$

(تکلیف: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶، ۱۰، ۱۲ و ۱۳، ۳۶ و ۳۷ و ۳۸)

27 - گزینه «د»

(مدری برای)

با استفاده از روابط مثلثاتی ضابطه تابع را ساده تر می‌کنیم:

$$f(x) = 8 \sin^2 bx - 8 \sin^4 bx - 2 \cos^2 bx$$

$$= 8 \sin^2 bx (1 - \sin^2 bx) - 2 \cos^2 bx$$

$$= 8 (\sin bx \cos bx)^2 - 2 \cos^2 bx = 8 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2bx\right) - 2 \cos^2 2bx$$

$$= 4 \sin^2 2bx - 2 \cos^2 2bx$$

با توجه به این که می‌دانیم $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ داریم:

$$f(x) = 2(\sin^2 2bx - \cos^2 2bx) = -2 \cos 4bx$$

ماکزیمم تابع برابر است با: $|-2| = 2 \Rightarrow a = 2$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{b} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a + b = 5$$

دوره تناوب:

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۷ و ۱۲۸ و ۱۲۹ و ۱۳۰ و ۱۳۱)

28 - گزینه «ا»

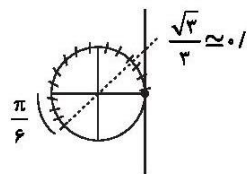
(امیر وفایی)

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 - 2 \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \pm \cos \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ یا } \tan \frac{x}{2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ یا } \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$



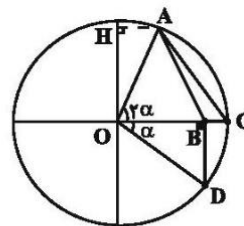
در بازه داده شده برای هر معادله یک جواب داریم: در مجموع دو جواب

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۸)

33 - گزینه «ا»

(سجیر تن آرا)

می‌دانیم $OB = \cos \alpha$ و لذا $BC = 1 - \cos \alpha$. ارتفاع مثلث ABC برابر OH است که از رابطه $OH = \sin 2\alpha$ به دست می‌آید.



بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times OH = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) \sin 2\alpha$$

$$S_{OBD} = \frac{1}{2} OB \times BD = \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \alpha$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABC}}{S_{OBD}} &= \frac{(1 - \cos \alpha) \sin 2\alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha) 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= 2(1 - \cos \alpha) = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۱) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

34 - گزینه «ب»

(سروش مونی)

$$\begin{aligned} (1 + \cos x)(1 + \cos 2x) &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} 2 \cos^2 x = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 x &= \frac{1}{16} \\ \times \sin^2 \frac{x}{2} &\rightarrow \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 x = \frac{1}{16} \sin^2 \frac{x}{2} \\ \text{شرط: } \sin^2 \frac{x}{2} &\neq 0 \\ \left(\frac{1}{2} \sin x\right)^2 \cos^2 x &= \frac{1}{16} \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{16} \sin^2 \frac{x}{2} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sin x\right)^2 &= \frac{1}{16} \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = \sin^2 \frac{x}{2} \\ \begin{cases} \frac{x}{2} - x = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{x}{2} + x = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases} &\text{ پس } 2x = k\pi \pm \frac{x}{2} \text{ و در نتیجه:} \end{aligned}$$

پس در فاصله $(0, 2\pi)$ جواب‌های $\frac{8\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ را داریم.

جمع جواب‌ها می‌شود: 6π

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌ها ۳۲ تا ۳۸)

35 - گزینه «ب»

(سروش مونی)

بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع به ازای $\sin x = \pm 1$ به دست می‌آیند پس:

$$\begin{aligned} \text{حداکثر: } |a| + b &= -1 \Rightarrow b = \frac{-5}{2}, |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{2} \\ \text{حداقل: } -|a| + b &= -4 \end{aligned}$$

پس داریم:

$$x = \frac{7\pi}{6} \rightarrow y = a \sin \frac{7\pi}{6} + b = \pm \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}$$

برای رسیدن به حداکثر مقدار، جواب قسمت اول را $+\frac{3}{2}$ قرار می‌دهیم:

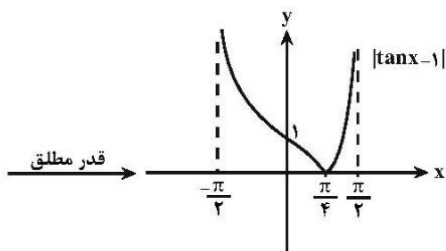
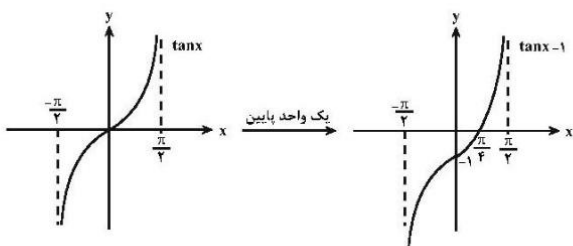
$$y = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-2}{2} = -1/5$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶، ۳۰ و ۳۱)

36 - گزینه «ب»

(سروش مونی)



با توجه به شکل تابع در $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ صعودی است.

(ترکیبی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۷ و ۳۷ تا ۳۱)

37 - گزینه «ا»

(سروش مونی)

با استفاده از رابطه $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ داریم:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{2x}{3}$$

و می‌دانیم دوره تناوب $\sin^2 kx$ برابر $\frac{\pi}{k}$ است پس $T = \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3\pi}{2}$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶ و ۳۰ تا ۳۳)

38 - گزینه «۴»

(سروش مونیانی)

همه را برحسب 10° بیان کنیم و دقت می‌کنیم که 360° از کمان قابل حذف است.

$$\frac{\sin(-10^\circ) - \cos(270^\circ + 10^\circ)}{\sin \frac{10^\circ}{90^\circ + 10^\circ} - 2\cos(\frac{3 \times 180^\circ}{180^\circ - 10^\circ} - 10^\circ)} = \frac{-\sin 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + 2\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{-2}{3} \tan 10^\circ = \frac{-2}{3} \times 0.1736 = -0.1157$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۸۷)

39 - گزینه «۴»

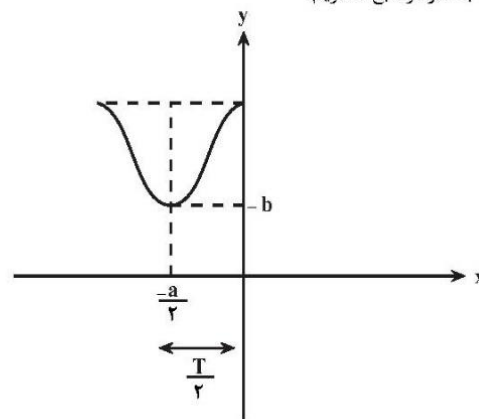
(سیر جواد نقری)

ابتدا ضابطه تابع را کمی ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + b \sin \pi (2ax - \frac{1}{4}) = a + b \sin (2a\pi x - \frac{\pi}{4})$$

$$= a - b \cos (2a\pi x)$$

با توجه به نمودار تابع f داریم:



$$T = \frac{2\pi}{|2a\pi|} = a \Rightarrow \frac{1}{|a|} = a \xrightarrow{a > 0} a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی کمترین مقدار تابع برابر $-b$ است، بنابراین:

$$y_{\min} = a - b = -b \xrightarrow{b < 0} a + b = -b \Rightarrow a = -2b$$

$$\xrightarrow{a=1} 1 = -2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$a + b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه:

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۸۷)

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶، ۴۰ و ۴۱)

40 - گزینه «۳»

(سروش مونیانی)

اگر به جای $\sin^2 x$ بنویسیم $1 - \cos^2 x$ داریم:

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1$$

$$= -2\cos^2 x - \cos x + 2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \text{ یا } \frac{1}{2}$$

در فاصله $(0, 2\pi)$ ، $\cos x$ دو بار به $\frac{1}{2}$ و یک بار به -1 می‌رسد، در نتیجه

۳ جواب متمایز داریم.

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۳ تا ۴۸)

41 - گزینه «۲»

(شاهین پروازی)

با توجه به شکل مختصات A به صورت $(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$ است و با دوران 135° در جهت دایره مثلثاتی به نقطه $B(\cos 180^\circ, \sin 180^\circ)$ می‌رسیم.

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B: (-1, 0)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$OA = OB = 1$$

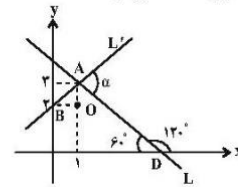
$$\Rightarrow P_{\triangle OAB} = 1 + 1 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

(مشقات) (ریاضی) صفحه‌های ۳۶ و ۳۹

42 - گزینه «۴»

(عمادزاده سپهری)

$x = 1$ را در معادله خط L جایگذاری می‌کنیم، عرض نقطه برخورد دو خط $y = 3$ به دست می‌آید. همچنین شیب L برابر $-\sqrt{3}$ است، بنابراین با قسمت مثبت محور Xها زاویه 120° می‌سازد.



مثلاً $\triangle AOB$ ، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس $\widehat{BAO} = 45^\circ$ است.

همچنین $\widehat{OAD} = 30^\circ$ است، پس داریم:

$$\alpha = 180^\circ - (\widehat{BAO} + \widehat{OAD}) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

(مشقات) (ریاضی) صفحه‌های ۳۰ و ۳۱

43 - گزینه «۱»

(معمور علیزاده)

$$\left(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}\right) \left(\frac{\sqrt{\sin^3 x}}{\sqrt{\cos^3 x}} + 1 + \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}\right) = \sqrt{\cos x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}) \frac{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x} + \sqrt{\sin x \cos x}}{\sqrt{\cos^3 x}} = \sqrt{\cos x}$$

حال با استفاده از اتحاد معروف به جاق و لاغر داریم:

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{\sin x})^3 - (\sqrt{\cos x})^3}{\sqrt{\cos^3 x}} = \sqrt{\cos x}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{\sin x})^3 - (\sqrt{\cos x})^3 = \sqrt{\cos^3 x} \sqrt{\cos x}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = 2$$

حال مقدار $\cos x$ را می‌یابیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + (2)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(مشقات) (ریاضی) صفحه‌های ۳۲ و ۳۶

44 - گزینه «۲»

(علی شهبازی)

$$\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow (\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha) (\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} (\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha) (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -1 \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10 \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = 10$$

(مشقات) (ریاضی) صفحه‌های ۳۲ و ۳۶

45 - گزینه «۲»

(شاهین پروازی)

با توجه به اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right) \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) = 1$$

$$\Rightarrow (-2) \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} + \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x - \frac{1}{\cos x} = 2 \\ \tan x + \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\cos x} = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\cos x} = -\frac{5}{2}$$

(مشقات) (ریاضی) صفحه‌های ۳۲ و ۳۶

50 - گزینه «۲»

(شاهین پروازی)

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin(\alpha - 2\pi) = -\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos^2(\frac{\pi}{3} + \alpha) = (\cos(\frac{\pi}{3} + \alpha))^2 = (-\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{-\sin \alpha - \sin^2 \alpha} \div \frac{\sin \alpha \cot \alpha - 1}{-1 - \sin \alpha} = \frac{\cot \alpha - 1}{1 + \sin \alpha} \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ است.

$$1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

پس حاصل عبارت (*) برابر است با:

$$\frac{\frac{2}{3} - 1}{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{5} + 1}{3}} = -\frac{1}{4}(\delta - \sqrt{5})$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

51 - گزینه «۱»

(شاهین پروازی)

توجه داریم که $\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$ و $\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$ است، یعنی $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{6}$ متمم یکدیگرند. پس $\tan \frac{2\pi}{3} = \cot \frac{4\pi}{6}$ است. از طرفی می‌دانیم:

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\Rightarrow A = (\cot(\frac{2\pi}{3}))^{10} \times (\tan(\frac{2\pi}{3}))^{12} = (\cot(\frac{2\pi}{3}) \tan(\frac{2\pi}{3}))^{10} \tan^2 \frac{2\pi}{3}$$

$$= \cot^2 \frac{2\pi}{3} \quad (*)$$

$$1 + \cot^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \cot^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} - 1 = \frac{1 - m^2}{1 - m^2}$$

$$\xrightarrow{(*)} A = \cot^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{1 - m^2} - 1 = \frac{m^2}{1 - m^2}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

52 - گزینه «۲»

(نسترن صمدی)

$$\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}) + \tan \theta}{\cos(-\frac{4\pi}{3}) + \sin(\frac{5\pi}{3})} = 1 \Rightarrow \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) + \tan \theta}{\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + \sin(2\pi - \frac{\pi}{3})} = 1$$

$$\frac{-\sin \frac{\pi}{3} + \tan \theta}{\cos \frac{\pi}{3} - \sin(\frac{\pi}{3})} = 1 \Rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \tan \theta}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow \tan \theta = 0$$

با توجه به گزینه‌ها، $\theta = 540^\circ$ قابل قبول است.

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

46 - گزینه «۱»

(شاهین پروازی)

می‌دانیم در قرقره‌ها جابه‌جایی (طول مکان)‌ها با هم برابرند:

$$L_1 = L_2 = L_3$$

$$\Rightarrow r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 = r_3 \theta_3 \Rightarrow r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 = \frac{1}{3} r_1 \theta_2$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\theta_2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 = 15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \\ \theta_2 = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

47 - گزینه «۳»

(علی شعرائی)

$$a \sin(2\pi + \frac{\delta\pi}{6}) + 4\sqrt{3} \tan(2\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cos(-2\pi + \frac{\pi}{6}) + 4 \cot(2\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow a \sin(\frac{\delta\pi}{6}) + 4\sqrt{3} \tan(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{6}) + 4 \cot(-\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow a(\frac{1}{2}) + 4\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4(-1)$$

$$\xrightarrow{\times 2} a - 24 = 3 - 4 \Rightarrow a = 13$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

48 - گزینه «۲»

(معمد مام‌قاری)

$$\begin{cases} \sin(-\frac{22\pi}{3}) = -\sin(\frac{22\pi}{3}) = \\ -\sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\frac{19\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \cos(10\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) = \\ \cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan(\frac{11\pi}{6}) = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}) - \sqrt{3}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

49 - گزینه «۳»

(معمد رضا نوش‌کاران)

با ساده کردن هر یک از نسبت‌های مثلثاتی داریم:

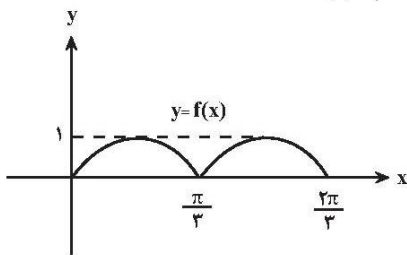
$$\cos(409^\circ) = \cos(360^\circ + 49^\circ) = \cos(49^\circ) = \sin(41^\circ)$$

$$\sin(1399^\circ) = \sin(8 \times 180^\circ - 41^\circ) = -\sin 41^\circ$$

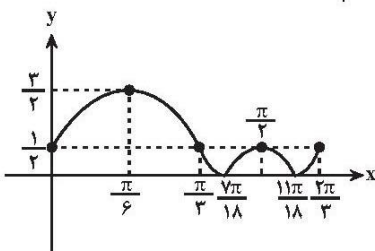
$$\Rightarrow A = \frac{\sin(41^\circ) - 2 \sin(41^\circ)}{3 \sin(41^\circ)} = \frac{-\sin(41^\circ)}{3 \sin(41^\circ)} = -\frac{1}{3}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

نمودار صحیح تابع $f(x) = |\sin 3x|$:



نمودار صحیح تابع $g(x) = \left| \sin 3x + \frac{1}{2} \right|$:



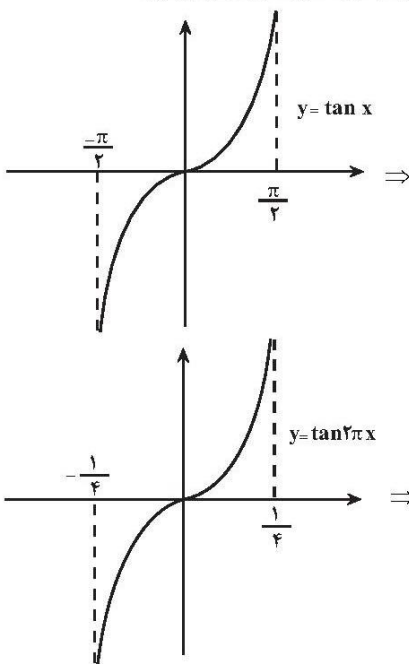
همانطور که از نمودار توابع f و g مشخص است دوره تناوب تابع $f(x)$ و $g(x)$ به

$$\frac{T_f}{T_g} = \frac{1}{2} \quad \text{ترتیب } \frac{\pi}{3} \text{ و } \frac{2\pi}{3} \text{ داریم:}$$

(مثال: (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰ و ۴۱)

گزینه ۳» 57

نمودار تابع f را در یک دوره تناوب رسم می‌کنیم:



(رسمان پورریسم)

گزینه ۴» 53

شیب خط برابر با $\tan \alpha$ می‌باشد. بنابراین:

$$\tan \alpha = -3 \quad (*)$$

برای یافتن حاصل عبارت $\frac{-\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ ، صورت و مخرج را بر $\cos \alpha$

$$\frac{-\tan \alpha + 1}{1 + \tan \alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{-(-3) + 1}{1 + (-3)} = \frac{4}{-2} = -2$$

تقسیم می‌کنیم:

(مثال: (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۰ و ۳۱)

گزینه ۱» 54

(فامر نصیری)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} - \tan x &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{2}{5} = 0.4 \end{aligned}$$

(مثال: (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۸)

گزینه ۲» 55

(سپید حسن‌قاری)

برای یافتن برد تابع $f(x)$ ، ابتدا $\cos^2 x$ را به $1 - \sin^2 x$ تبدیل کرده و تشکیل مربع کامل می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + a = -2 \sin^2 x + 2 \sin x + 2 + a \\ &= -2 \left(\sin^2 x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) + 2 + a \\ &= -2 \left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{25}{8} + a \end{aligned}$$

حال با توجه به محدوده $\sin x$ داریم:

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 &\rightarrow \frac{-7}{4} \leq \sin x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq \left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{49}{16} \\ \xrightarrow{\times(-2)} \quad \frac{49}{8} &\leq -2 \left(\sin x - \frac{1}{4} \right)^2 \leq 0 \\ \xrightarrow{+\frac{25}{8}+a} \quad \frac{25}{8} + a &\leq f(x) \leq \frac{25}{8} + a \end{aligned}$$

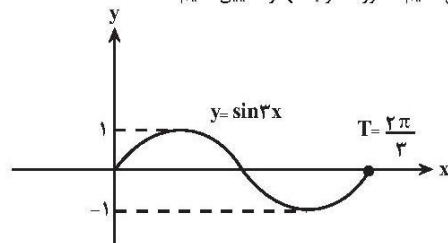
$$\Rightarrow \begin{cases} -3 + a = -\frac{7}{4} \\ \frac{25}{8} + a = \frac{21}{8} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

(مثال: (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۸)

گزینه ۳» 56

(عباس اشرفی)

نمودار $y = \sin 3x$ را در یک دوره تناوب رسم می‌کنیم و از روی آن نمودارهای دو تابع f و g را می‌کشیم تا دوره تناوب آنها را تعیین کنیم.



چون a و b هر دو مثبت هستند پس مینیمم تابع زمانی است که $\sin(2x - \frac{\pi}{12})$ دارای بیشترین مقدار باشد که با توجه به (۱) داریم:

$$2x_1 - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{24}$$

و در نتیجه $x_1 = \frac{7\pi}{24}$ و نیز ماکزیمم تابع زمانی است که $\sin(2x - \frac{\pi}{12})$ دارای کمترین مقدار باشد که با توجه به (۱) داریم:

$$2x_2 - \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{19\pi}{24}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{19\pi}{24} - \frac{7\pi}{24} = \frac{12\pi}{24} = \frac{\pi}{2}$$

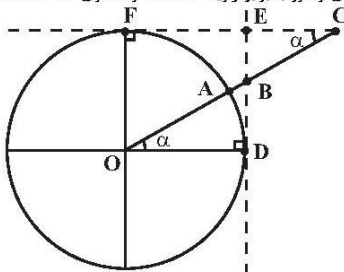
(ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۸ و ۹۳)

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۱ و ۳۰، ۳۶ و ۳۱)

(آریان فیری)

60 گزینه «۳»

روش اول: بهتر است به جای محاسبه طول پاره‌خط BC ، طول پاره‌خط‌های OC (واقع در مثلث قائم‌الزاویه OCF) را و OB (واقع در مثلث قائم‌الزاویه ODB) را حساب کرده و از هم کم کنیم. به شکل زیر دقت کنید (توجه کنید که زاویه OCF طبق قاعده خطوط موازی و مورب برابر زاویه COD و مساوی α است):



در مثلث OCF داریم:

$$\sin \alpha = \frac{OF}{OC} = \frac{1}{OC} \Rightarrow OC = \frac{1}{\sin \alpha}$$

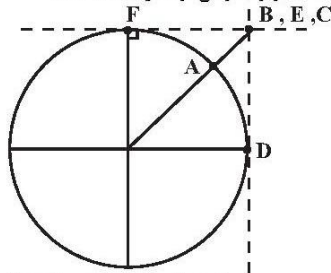
در مثلث ODB داریم:

$$\cos \alpha = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$BC = OC - OB = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}$$

پس:

روش دوم: واضح است که اگر در حالت خاص، $\alpha = 45^\circ$ باشد، شکل مسئله به صورت زیر بوده و نقاط B و C و E برهم منطبق می‌شوند، لذا طول پاره‌خط BC برابر صفر بوده و تنها گزینه‌ای که به ازای $\alpha = 45^\circ$ برابر صفر می‌شود، گزینه «۳» است.



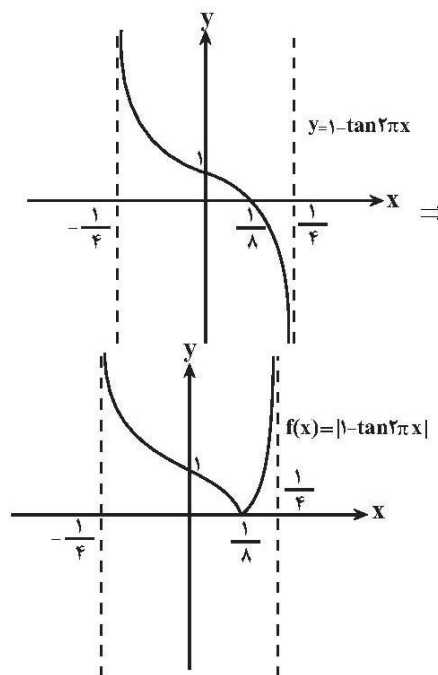
(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۶ و ۳۱)

(مصطفی کریمی)

61 گزینه «۲»

در ابتدا دقت می‌کنیم که همواره:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$



تابع در بازه $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ یکنوا است.

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۶ و ۳۱)

58 گزینه «۳»

مبدأ مختصات روی نمودار تابع f قرار دارد، پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cos(-\frac{2\pi}{3}) + 1 = a(\frac{-1}{2}) + 1 = 0 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی طبق فرض:

$$S_{\triangle ABC} = 2 / 2\pi \Rightarrow \frac{1}{2} (2 \times AC) = 2 / 2\pi \Rightarrow AC = \frac{2\pi}{3}$$

همچنین طبق نمودار، نقطه A اولین ریشه معادله $f(x) = 0$ قبل از $x = 0$ و نقاط D و C به ترتیب دومین و چهارمین ریشه همین معادله است:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \cos(bx - \frac{2\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow bx - \frac{2\pi}{3} = \dots, \frac{-4\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 x_A $x=0$ x_D x_C

$$\left\{ \begin{aligned} (bx_C - \frac{2\pi}{3}) - (bx_A - \frac{2\pi}{3}) &= \frac{14\pi}{3} \Rightarrow b(x_C - x_A) = \frac{14\pi}{3} \Rightarrow b = 2 \\ &\quad \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \right.$$

$$bx_D - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow 2x_D = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow x_D = \pi$$

$$\Rightarrow a + \frac{x_D}{\pi} - b = 2 + \frac{\pi}{\pi} - 2 = 1$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۶ و ۳۱)

(معمرفرس سلامی‌فسیلی)

59 گزینه «۲»

$$0 < x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{12} < 2x - \frac{\pi}{12} < 2\pi - \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

68- گزینه «۳»

(سویل ساسانی)

$$a = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$|b| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \Rightarrow C\pi = 1/\delta T = 1/5 \times 6\pi = 9\pi$$

$$\Rightarrow c = 9$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{-\frac{1}{2} + 9}{\frac{3}{2}} = \frac{17}{3} = 1/2$$

توجه: نمودار تابع $y = \sin \frac{x}{3}$ در سمت راست $x = 0$ صعودی است ولی نمودار

تابع داده شده در سمت راست $x = 0$ نزولی است، پس $b < 0$.

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳)

69- گزینه «۲»

(معین کرمی)

ابتدا دو طرف رابطه را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$$

در نتیجه اگر به جای $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ قرار دهیم رابطه زیر به دست می‌آید:

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 0$$

از $\cos x$ فاکتور می‌گیریم:

$$\cos x (2 \cos x + 2 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \tan x: \text{تعریف نشده} \\ 2 \cos x = -2 \sin x \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

70- گزینه «۲»

(راتیال ابراهیمی)

برای نقطه A داریم:

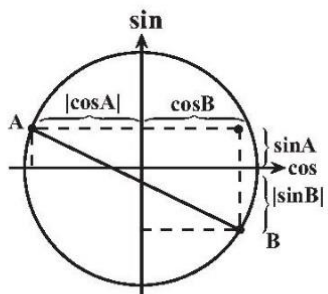
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \xrightarrow{\sin A = \frac{1}{3}} \cos^2 A = \frac{8}{9} \Rightarrow |\cos A| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

برای نقطه B داریم:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \xrightarrow{\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin^2 B = \frac{1}{2} \Rightarrow |\sin B| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال با توجه به دایره مثلثاتی، طول پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم، طبق قضیه

فیثاغورس داریم:



چون $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ پس فقط $\alpha = \frac{\pi}{12}$ قابل قبول است.

حالا داریم:

$$A = \sin \delta \alpha + \sin \alpha \xrightarrow{\alpha = 15^\circ} \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \cos 15^\circ + \sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow A^2 = (\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2 = 1 + \sin 30^\circ = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

واضح است که $A = \cos 15^\circ + \sin 15^\circ$ مقداری مثبت است و

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(\tan \alpha)(\cot \alpha) = P = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3} - m}{3 - \sqrt{5}}$$

ثانیاً:

چون $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ است، پس:

$$\frac{\sqrt{3} - m}{3 - \sqrt{5}} = 1 \Rightarrow \sqrt{3} - m = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow m = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 2$$

حالا داریم:

$$(m+2)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2 + 2}{m} \right)^2 = 1 + 2\sqrt{15}$$

پس:

$$(m+2)^2 (\sin \delta \alpha + \sin \alpha) = (1 + 2\sqrt{15}) \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) = (\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{6}) = 4\sqrt{6} + 3\sqrt{10}$$

از مقایسه این مقدار با $a\sqrt{6} + b\sqrt{10}$ داریم: $a = 4$ و $b = 3$ و $a + b = 7$

(تکلیف)

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۳۲ و ۳۳) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

67- گزینه «۴»

(ایلا مرلری)

باید توجه داشت که $\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{\pi}{18}$ است و در نتیجه

$$\sin \delta x = \cos 4x$$

$$\frac{-2 \sin \delta x + \cos 4x}{2 \sin \delta x + 2 \cos 4x} = \frac{-2 \sin \delta x + \sin \delta x}{2 \sin \delta x + 2 \sin \delta x} = \frac{-\sin \delta x}{4 \sin \delta x} = -\frac{1}{4}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۷)

73- گزینه «۱»

برای تعیین دامنه این تابع داریم:

$$\begin{cases} 16 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-4, 4) \\ \frac{\pi + \pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi \Rightarrow x \neq 2k \end{cases}$$

یعنی باید از بازه $(-4, 4)$ اعداد زوج را خارج کنیم:

$$(-4, 4) - \{-2, 0, 2\}$$

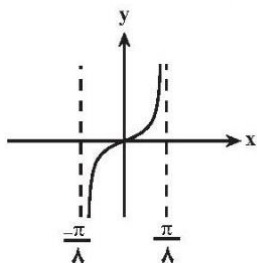
این محدوده شامل ۴ بازه به طول ۲ است:



پس تا اینجا $n = 4$ و $a = 2$ می‌باشد.

نهایتاً باید وضعیت یکنوایی تابع $g(x) = 2 \tan 4x$ را بررسی کنیم. این تابع در

یک دوره تناوب به صورت زیر است:



برای آن که این تابع در بازه $(0, C)$ اکیداً صعودی باشد، حداکثر مقدار C برابر با

$$\frac{\pi}{8} \text{ است.}$$

(مثال ۳، صفحه‌های ۳۶ و ۳۷ تا ۳۸)

74- گزینه «۲»

(سروش مولایی)

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 - \sin 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \cos 8x = 2 \cos^2 4x - 1 = 2 \left(\frac{7}{8}\right)^2 - 1 = \frac{49}{32} - 1 = \frac{17}{32}$$

$\cos 8x$ به اندازه $\frac{1}{4}$ از $\frac{1}{32}$ بزرگ‌تر است.

(مثال ۳، صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(|\cos A| + \cos B)^2 + (\sin A + |\sin B|)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26+2\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

(مثال ۱، صفحه‌های ۳۶ و ۳۷)

71- گزینه «۲»

(مصطفی کریمی)

دقت می‌کنیم که ساده شده عبارت برابر است با:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{\cos x} = \frac{(2 \sin x - 1) \cos x}{\cos x} \\ &= 2 \sin x - 1 (\cos x \neq 0) \end{aligned}$$

پس نقطه B همان $(\frac{\pi}{2}, 1)$ است و از طرفی برای x_A داریم:

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در قسمت منفی‌ها}} x_A = \frac{-\pi}{6}$$

و با رابطه $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ داریم:

$$m = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{10\pi}{6}} = \frac{3}{5\pi}$$

(مثال ۳، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۸ و ۳۹ تا ۴۰)

72- گزینه «۲»

(نیما گریوریان)

نکته: دوره تناوب تابع $y = \tan kx$ به صورت $T = \frac{\pi}{|k|}$ است.

نمودار تابع در بازه $[0, \frac{\pi}{5}]$ دو مرتبه تکرار شده است، یعنی دوره تناوب این تابع،

$$\frac{\pi}{5} \text{ است}$$

$$2T = \frac{\pi}{5} \Rightarrow T = \frac{\pi}{10}$$

$$f(x) = a \tan\left(\frac{b\pi}{3}x\right) \Rightarrow T = \frac{\pi}{\left|\frac{b\pi}{3}\right|} = \frac{3}{|b|} \Rightarrow \frac{3}{|b|} = \frac{\pi}{10}$$

$$\Rightarrow |b| = 30 \Rightarrow b = \pm 30$$

با مقایسه نمودار تابع داده شده و فرم اصلی $y = \tan x$ متوجه می‌شویم که نمودار

تابع در یک عدد منفی ضرب شده است. (تابع $y = \tan x$ صعودی است) و از

آن جایی که $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ است، نتیجه می‌گیریم که a و b باید

مختلف‌العلامت باشند.

(مثال ۳، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۸)

75- گزینه «۲»

(آریان فیرری)

$$\begin{aligned} \text{gof}(x) &= g(f(x)) = g(-1 + \sin^2 x) = g(-\cos^2 x) \\ &= (-\cos^2 x)^2 - \cos^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x - 1) \\ &= \cos^2 x (-\sin^2 x) = -(\sin x \cdot \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

پس:

$$\text{gof}\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{1}{4} \sin^2\left(2\left(\frac{\pi}{16}\right)\right) = -\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

حالا داریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \Rightarrow -\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{8} &= -\frac{1}{4} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{-2 + \sqrt{2}}{16} = \frac{-1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

از مقایسه این عدد با $\frac{-1}{a} + \frac{\sqrt{2}}{b}$ (و یا شرط $a, b \in \mathbb{Z}$) داریم:

$$a = 16, b = 16$$

پس نهایتاً باید وضعیت یکنوایی تابع $h(x) = -4 + 16 \cos 8x$ را در بازه $(0, 2\pi)$ بررسی کنیم که معادل با همان وضعیت یکنوایی تابع $y = \cos 8x$ در این بازه است.

$$\text{دوره تناوب این تابع } T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ است و واضح است که نمودار } y = \cos x$$

در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ ، یک بار از حالت نزولی به صعودی تغییر یکنوایی می‌دهد.

$$\text{حالا از آنجا که در بازه } (0, 2\pi) \text{، این تابع } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \text{ بار تکرار می‌شود، پس } 8 \text{ بار}$$

از حالت نزولی به صعودی می‌رود.

(مثال: ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۳، ۱۳۷ تا ۱۳۶ و ۳۰ تا ۳۳)

76- گزینه «۴»

(سروش موئینی)

$$\cos 2x = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \frac{\pi}{2}}{3} = \frac{(4k-1)\pi}{6} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(0, 2\pi)} \begin{cases} k=0, 1, 2 & x = \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6} \\ k=1, 2, 3, 4, 5, 6 & x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{جمع} = \frac{2\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{13\pi}{3}$$

$$= 13/5\pi$$

(مثال: ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸)

77- گزینه «۳»

(امیرحوشنگ انصاری)

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \begin{array}{c|ccc} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline x & \frac{\pi}{4} & \frac{5\pi}{4} & \frac{9\pi}{4} \end{array} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \begin{array}{c|ccc} k & 1 & 2 & 3 \\ \hline x & \frac{3\pi}{4} & \frac{5\pi}{2} & \frac{9\pi}{4} \end{array} \end{cases}$$

باید حواسمان باشد که مخرج کسر صفر نشود که در هیچ کدام این اتفاق نمی‌افتد:

$$\text{مجموع} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$$

(مثال: ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸)

78- گزینه «۴»

(آریان فیرری)

$$\text{با نوشتن } \cot x = \frac{1}{\tan x} \text{ داریم:}$$

$$\tan^2 x + 6\left(\frac{1}{\tan x}\right)^2 = 5 \Rightarrow \tan^2 x + \frac{6}{\tan^2 x} = 5$$

با ضرب طرفین معادله در $\tan^2 x$ داریم:

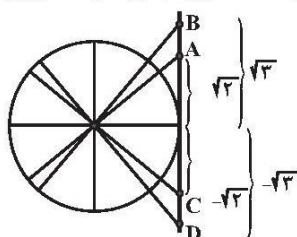
$$\tan^4 x + 6 = 5 \tan^2 x \Rightarrow \tan^4 x - 5 \tan^2 x + 6 = 0$$

با تغییر متغیر $\tan^2 x = t$ داریم:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2, 3$$

$$\begin{cases} \tan^2 x = 2 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{2} \\ \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

جوابها را روی دایره مثلثاتی نمایش می‌دهیم:

واضح است که طول پاره خط AB در نیمه بالایی محور tan برابر با $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ است.

(مثال: ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۸)

79- گزینه «۲»

(دانیال ابراهیمی)

عبارت $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ معادل $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ است. با جایگذاری $x = \frac{\pi}{3}$ در معادله داده شده، مقدار a را بدست می آوریم:

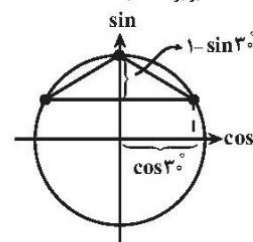
$$2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\pi) = a \Rightarrow a = 2$$

حال با استفاده از اتحاد $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ، معادله را بازنویسی می کنیم:

$$2\sin x + (1 - 2\sin^2 x) = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

مطابق شکل زیر، مساحت مثلث برابر است با:



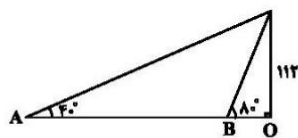
$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times (\text{ارتفاع}) \times (\text{قاعده}) = \frac{1}{2} \times (2\cos 30^\circ) \times (1 - \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه های ۳۳۷ و ۳۳۸)

80- گزینه «۴»

(بهرام فلاج)

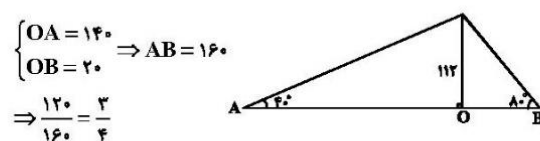
با رسم شکل برای دو حالت داریم:



حالت «اول»:

$$\left. \begin{aligned} \tan 40^\circ &= \frac{112}{OB} = \delta / \rho \Rightarrow OB = 20 \\ \tan 40^\circ &= \frac{112}{OA} = \rho / \delta \Rightarrow OA = 140 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = 120$$

حالت «دوم»:



(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه های ۲۹ و ۳۵)

81- گزینه «۳»

(سپید ساسانی)

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$1 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 = \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 \Rightarrow 1 + \frac{(m+1)^2}{m^2} = \frac{(m+2)^2}{m^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\times m^2}{\times m^2} &\Rightarrow m^2 + m^2 + 2m + 1 = m^2 + 4m + 4 \\ \Rightarrow m^2 - 2m - 3 &= 0 \Rightarrow m = -1, 3 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که حاصل مقدار تولید شده برای سینوس، عددی در بازه $[-1, 1]$ باشد. (کتابخانه هر مقدار حقیقی را می تواند تولید کند). همچنین در صورت سؤال ذکر شده است که $m \neq 0$ بنابراین:

$$m = 3 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5} \text{ مقدار ۲}$$

$$m = -1 \Rightarrow \sin x = -1 \text{ مقدار ۱}$$

(مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه های ۳۲ و ۳۶)

82- گزینه «۱»

(مهرزاد استقلاییان)

$$\tan 37^\circ = \cot 53^\circ = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan 53^\circ = \frac{4}{3}$$

$$1 + \tan^2 53^\circ = \frac{1}{\cos^2 53^\circ} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 53^\circ} \Rightarrow \cos 53^\circ = \frac{3}{5}$$

$$= \frac{\sin(6\pi - 53^\circ) + \tan(3\pi + 37^\circ) - \sin(9\pi + 53^\circ)}{\tan^2(-5\pi - 53^\circ) - \cos(-5\pi + 53^\circ)}$$

$$= \frac{-\sin 53^\circ + \tan 37^\circ + \sin 53^\circ}{\tan^2 53^\circ + \cos 53^\circ} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{16}{9} + \frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{107}{45}} = \frac{3}{45}$$

(رشد علینوار)

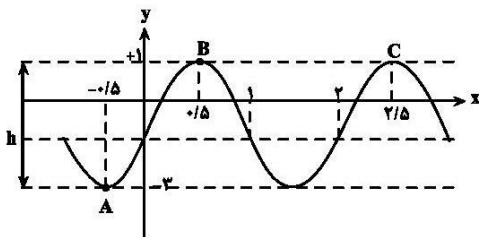
85- گزینه «۲»

با ساده کردن تابع با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$y = 1 - \sqrt{\left(\sin \frac{\pi}{3}x - \cos \frac{\pi}{3}x\right)^2}$$

$$\Rightarrow y = 1 - \sqrt{\underbrace{\left(\sin^2 \frac{\pi}{3}x + \cos^2 \frac{\pi}{3}x\right)}_1 - \underbrace{2\sin \frac{\pi}{3}x \cos \frac{\pi}{3}x}_{\sin \pi x}}$$

$$\Rightarrow y = 1 - \sqrt{1 - \sin \pi x} = 1 - \sqrt{1 - \sin \pi x} \Rightarrow y = \sqrt{1 - \sin \pi x}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \min = -|a| + c = -2 - 1 = -3 \\ \max = |a| + c = 2 - 1 = 1 \\ T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، با انتخاب BC به عنوان قاعده و h به عنوان ارتفاع مثلث داریم:

$$\begin{cases} h = \max - \min = 1 - (-3) = 4 \\ BC = 2/5 - 0/5 = 2 \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۲ و ۳۶ و ۳۰ و ۳۳)

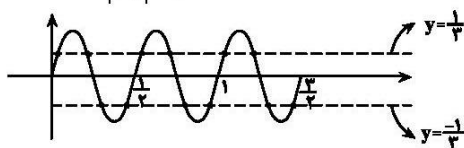
(مهرزاد استقلاییان)

86- گزینه «۳»

$$\cos(\pi \sin(\frac{\pi}{3}x)) = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \pi \sin(\frac{\pi}{3}x) = \frac{\pi}{3} k \pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{3}x = \frac{k \pm 1}{3} \xrightarrow{k \text{ فقط } 0} \sin \frac{\pi}{3}x = \pm \frac{1}{3}$$

$$y = \sin \frac{\pi}{3}x, T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = \frac{6}{1} = 6$$



(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه ۳۳ و ۳۸)

(سراسری تهرانی ۹۲)

87- گزینه «۴»

ابتدا توجه کنید که:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$$

$$= \frac{3 \times 45}{4 \times 107} = \frac{135}{428}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۸۷)

(سیار راولطلب)

83- گزینه «۳»

برای حل سؤال از فرمول مثلثاتی $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{\cos 2x}{\tan x + \cot x} = \frac{\cos 2x}{\frac{2}{\sin 2x}} = \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \sin 4x$$

حال به ازای $x = \frac{\pi}{33}$ خواهیم داشت:

$$A = \frac{1}{4} \sin\left(4 \times \frac{\pi}{33}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{33}$$

حال برای محاسبه مقدار $\sin \frac{\pi}{\lambda}$ ، از فرمول مثلثاتی $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{\lambda} = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

توجه شود که چون $\frac{\pi}{\lambda}$ در ناحیه اول است، پس $\sin \frac{\pi}{\lambda}$ مثبت است.

$$A = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{8}$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه ۳۷ و ۳۳)

(پورام فلاح)

84- گزینه «۲»

به‌خاطر وجود دوره تناوب این تابع همانند تابع $y = \sin(b\pi x)$ به‌صورت

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \text{ می‌باشد. پس داریم:}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3 \xrightarrow{b > 0} b = 3$$

حال به این موضوع توجه می‌کنیم که تابع سینوس در یک دوره تناوب با شروع از صفر، اول به مقدار ۱ و سپس به مقدار -۱ می‌رسد. پس قله اول به عرض ۱ مربوط به زمانی است که حاصل سینوس برابر ۱ و قله دوم به عرض ۳ مربوط به زمانی است که حاصل سینوس برابر -۱ باشد. پس داریم:

$$a|1 - c| = 1 \xrightarrow{0 < c < 1} a(1 - c) = 1$$

$$a|-1 - c| = 3 \xrightarrow{} a(1 + c) = 3$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{1 + c}{1 - c} = 3 \rightarrow 1 + c = 3 - 3c \rightarrow c = \frac{1}{4}, a = 2$$

$$\Rightarrow ac + b = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3 = 4$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ و ۳۶، ۳۰ و ۳۴)

بنابراین معادله‌ی مقروض سؤال را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$-\cos 2x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow -\cos 2x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه ۳۳۳ تا ۳۸)

88- گزینه «۳»

(سیر هوار نظری)

ابتدا به کمک روابط $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ و $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ داریم:

$$3 \sin^2 2x - 4 \cos^2 x + 1 = 0 \Rightarrow 3(1 - \cos^2 2x) - 4\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3 - 3 \cos^2 2x - 4 - 4 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow 3 \cos^2 2x + 4 \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x (3 \cos 2x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{4}{3} \end{cases} \times$$

توجه شود که $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ است بنابراین $\cos 2x = -\frac{4}{3}$ غیر قابل قبول است.

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

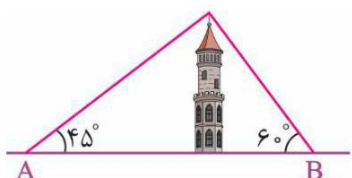
k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

مجموع جواب‌ها: 4π

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳۳ تا ۳۸)



1- در شکل مقابل، اگر بلندی برج ۶۰ متر باشد، فاصله دو نقطه A و B تا یکدیگر چه عددی است؟



۲۰(۲+√۲) (۲)

۳۰(۳+√۳) (۱)

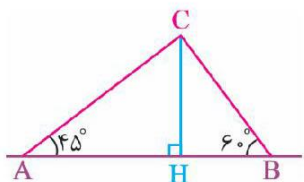
۲۰(۲+√۳) (۴)

۲۰(۳+√۳) (۳)

(ریاضی ۱ - صفحه ۳۱ تا ۳۳ - ساده)

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم پاره خط CH نمایانگر برج باشد.



$\Delta ACH: \hat{A} = 45^\circ \Rightarrow AH = CH = 60$

$\Delta BCH: \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{CH}{HB}$

$\Rightarrow HB = \frac{CH}{\tan 60^\circ} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = AH + BH = 60 + 20\sqrt{3} = 20(3 + \sqrt{3})$

گروه آموزشی ماز

2- هرگاه $A = \sin^4 30^\circ - \cos^4 30^\circ$ و $B = \cos^2 150^\circ - \sin^2 150^\circ$ مقدار $\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$ کدام است؟

-۴ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

۴ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

(ریاضی ۱ - صفحه ۳۲ و ۳۳ - ساده)

پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا A و B را ساده می‌کنیم.

$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{1}{2}$

$\begin{cases} \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = -2 - 2 = -4$

حال مقدار $\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$ را به دست می‌آوریم.

www.biomaze.ir

3- هرگاه $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - 3 \cos\left(\theta - \frac{9\pi}{4}\right) = 0$ باشد، مقدار $\tan\left(\theta - \frac{5\pi}{4}\right)$ چه عددی است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

(ریاضی ۲ - صفحه ۸۰ تا ۸۶ - ساده)

پاسخ: گزینه ۱

$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \cos \theta$

$\cos\left(\theta - \frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{4} - \theta\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sin \theta$

$2 \cos \theta - 3 \sin \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{2}{3}$

پس:

$\tan\left(\theta - \frac{5\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right) = -\tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\cot \theta$

از طرفی:

$\Rightarrow -\cot \theta = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{3}{2}$

4- اگر $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ و $\tan x + \cot x = \frac{13}{6}$ باشد، مقدار $\sin(x - \frac{5\pi}{4})$ چه عددی است؟

(۴) $\frac{3}{\sqrt{13}}$

(۳) $\frac{2}{\sqrt{13}}$

(۲) $-\frac{3}{\sqrt{13}}$

(۱) $-\frac{2}{\sqrt{13}}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ - صفحه ۷۸ و ۸۳ - متوسط)

ابتدا فرض می‌کنیم $\tan x = A$ در این صورت:

$$\tan x + \cot x = \frac{13}{6} \Rightarrow A + \frac{1}{A} = \frac{13}{6}$$

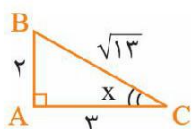
$$6A^2 - 13A + 6 = 0 \quad A = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} \quad \begin{cases} A = \frac{13+5}{12} = \frac{3}{2} \\ A = \frac{13-5}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\tan x = \frac{2}{3}, \quad \cot x = \frac{3}{2}$$

چون $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ پس $\cot x > \tan x$ لذا:

$$\sin(x - \frac{5\pi}{4}) = -\sin(\frac{5\pi}{4} - x) = -\sin(2\pi + \frac{\pi}{4} - x) = -\sin(\frac{\pi}{4} - x) = -\cos x$$

از طرفی:



مثلثی فرض می‌کنیم که اضلاع آن به شکل مقابل باشد به‌طوری‌که $\cot x = \frac{3}{2}$:

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{5\pi}{4}) = -\cos x \xrightarrow[\cos x < 0]{\pi < \cos x < \frac{5\pi}{4}} -\cos x = -(-\frac{3}{\sqrt{13}}) = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

گروه آموزشی ماز

5- اگر k عدد صحیح باشد زاویه‌های $\theta = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ بر روی دایره مثلثاتی یک چند ضلعی پدید می‌آورند، محیط آن چندضلعی کدام است؟

(۴) $8\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۳) $8\sqrt{2} + \sqrt{2}$

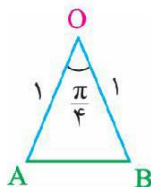
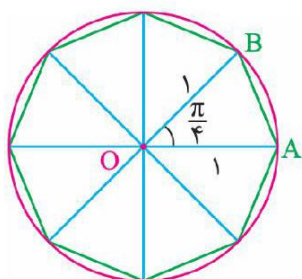
(۲) $4\sqrt{2} - \sqrt{2}$

(۱) $4\sqrt{2} + \sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ - صفحه ۷۶ - سخت)

اولاً دقت کنید این زوایا $\frac{\pi}{4}$ مرتباً افزایش می‌یابند تا به زاویه بعدی برسند به عبارتی ۸ نقطه بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کند که فاصله آنها به‌طور منظم

روبه‌رو به زاویه مرکزی $\frac{\pi}{4}$ است.



ثانیاً $\frac{\pi}{12}$ هیچ اثری روی محیط چند ضلعی ایجاد شده ندارد و فقط چند ضلعی را به اندازه $\frac{\pi}{12}$

در جهت پادساعتگرد می‌چرخاند، بنابراین آن را نادیده می‌گیریم.
با این مقدمه داریم:

در ۸ ضلعی منتظم، ۸ مثلث مشابه OAB داریم ابتدا AB را پیدا می‌کنیم و محیط ۸ برابر آن است.

نکته:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \hat{A}$$

پس داریم:

$$AB^2 = 1 + 1 - 2 \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow AB^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow \text{محیط ۸ ضلعی} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

6- نمودار تابع $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ و $g(x) = 3 \cos(2\pi - x)$ را در بازه $(0, 2\pi)$ رسم کرده‌ایم. در کدام بازه نمودار $f(x)$ بالاتر از نمودار $g(x)$ قرار می‌گیرد؟

- (1) $(0, \pi)$ (2) $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ (3) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (4) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ - صفحه ۹۳ - متوسط)

اگر در ابتدا ضابطه هر یک از دو تابع را ساده کنیم بهتر می‌توانیم بازه را مشخص کنیم.

$$f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$$

$$g(x) = 3 \cos(2\pi - x) = 3 \cos(-x) = 3 \cos x$$

برای آن که نمودار $f(x)$ بالاتر از نمودار $g(x)$ قرار بگیرد باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$f(x) > g(x) \Rightarrow \cos x > 3 \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

این نامساوی هنگامی برقرار است که $\cos x < 0$ باشد، یعنی:

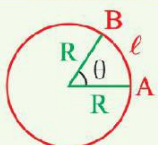
گروه آموزشی ماز

7- طول کمان مقابل به زاویه θ در دایره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر چند برابر طول کمان مقابل به زاویه 3θ در دایره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ - صفحه ۷۴ - ساده)

نکته: در دایره‌ای که شعاع R ، و زاویه مرکزی برحسب رادیان، θ باشد و طول کمان روبه‌رو به زاویه θ را ℓ فرض کنیم آنگاه $\ell = R\theta$.

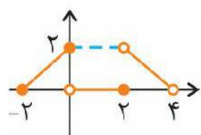


$$\begin{cases} \ell_1 = 6\theta \\ \ell_2 = 8 \times 3\theta = 24\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{6\theta}{24\theta} = \frac{1}{4}$$

پس:

www.biomaze.ir

8- تابعی متناوب با دوره تناوب ۶ است، اگر بخشی از نمودار آن شکل مقابل باشد، مقدار $3f(-28) + 2f(21)$ چه عددی است؟



- (1) ۲
(2) -۲
(3) ۴
(4) -۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ - صفحه ۳۲ - متوسط)

$$f(x) = f(x + 6k)$$

چون دوره تناوب تابع برابر ۶ است. پس:

$$f(-28) = f(-28 + 30) = f(2)$$

که در آن $k \in \mathbb{Z}$ پس:

$$f(-28) = f(2) = 0$$

$$f(21) = f(21 - 18) = f(3) = 1$$

از طرفی ضابطه تابع f در بازه $(2, 4)$ به صورت $f(x) = -x + 4$ است، لذا:

$$\Rightarrow 3f(-28) + 2f(21) = 3 \times 0 + 2 \times 1 = 2$$

گروه آموزشی ماز

9- هرگاه بیشترین مقدار تابع $f(x) = 2a + 5 - 2 \cos(\frac{\pi}{3}x - 1)$ برابر ۱۰ باشد. کم‌ترین مقدار تابع $g(x) = 2 - 4a - 2a \sin(\frac{\pi}{6}x)$ چه عددی است؟

- (1) صفر (2) -۲ (3) -۶ (4) -۴

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ و ۴۰ - ساده)

نکته:

$$\begin{aligned} f(x) &= a + b \cos x \quad (cx) \Rightarrow \begin{cases} \max = a + |b| \\ \min = a - |b| \end{cases} \\ g(x) &= a + b \sin x \quad (cx) \end{aligned}$$

$$f(x) = 2a + 5 - 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x - 1\right)$$

$$\max f : 2a + 5 + |-3| = 10 \Rightarrow a = 1$$

$$g(x) = 2 - 4 - 2 \sin \frac{\pi}{6}x = -2 - 2 \sin \frac{\pi}{6}x$$

$$\min g = -2 - 2 = -4$$

با توجه به آن که بیشترین مقدار تابع برابر ۱۰ می‌باشد، آنگاه:

در این صورت:

www.biomaze.ir

10- در کدام تابع، بیشترین مقدار تابع نصف دوره تناوب تابع است و علاوه بر آن کم‌ترین مقدار تابع $\frac{1}{3}$ بیشترین مقدار تابع خواهد بود؟

$$f(x) = 8 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{\pi}{24}\right) \quad (2)$$

$$f(x) = 4 + 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$f(x) = 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (4)$$

$$f(x) = -4 - 8 \cos\left(\frac{\pi}{24}x\right) \quad (3)$$

(ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ و ۴۰ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲



$$\begin{cases} \max = a + |b| \\ \min = a - |b| \\ T = \frac{2\pi}{|c|} \end{cases}$$

نکته: در توابع $f(x) = a \pm b \sin(cx + d)$, $g(x) = a \pm b \cos(cx + d)$ داریم:

پس کافی است گزینه‌ها را یکی، یکی بررسی کنیم.



$$f(x) = 4 + 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \max = 4 + 8 = 12 \\ \min = 4 - 8 = -4 \\ T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \end{cases} \quad \times$$

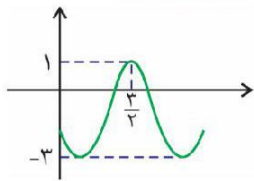
$$f(x) = 8 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{\pi}{24}\right) \Rightarrow \begin{cases} \max = 8 + 4 = 12 \\ \min = 8 - 4 = 4 \\ T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$f(x) = -4 - 8 \cos\left(\frac{\pi}{24}x\right) \Rightarrow \begin{cases} \max = -4 + 8 = 4 \\ \min = -4 - 8 = -12 \\ T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{24}} = 48 \end{cases} \quad \times$$

$$f(x) = 8 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} \max = 8 + 4 = 12 \\ \min = 8 - 4 = 4 \\ T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24 \end{cases} \quad \times$$

تنها گزینه‌ای که شرایط $\min = \max$ و $T = \frac{1}{4}$ برقرار است، گزینه ۲ است.

گروه آموزشی ماز



11- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - b \cos \pi(\frac{2}{3} + cx)$ مطابق شکل مقابل است. مقدار $a + |bc|$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

-۱ (۴)

صفر (۳)

(ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ و ۳۶ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آن که $f(0) < 0$ داریم:

$$f(0) = a - b \cos \frac{2\pi}{3} = a \Rightarrow a < 0$$

$$\begin{cases} \max = 1 \\ \min = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + |b| = 1 \\ a - |b| = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -1, |b| = 2$$

از طرفی:

$$\frac{3}{4}T = \frac{3}{2} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|c|\pi} = 2 \Rightarrow |c| = 1$$

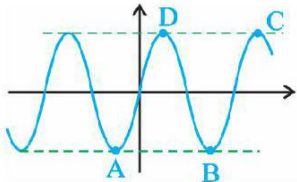
از طرفی با توجه به نمودار داریم:

$$a + |bc| = -1 + (2 \times 1) = -1 + 2 = 1$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با:

www.biomaze.ir

12- بخشی از نمودار تابع $y = a \sin(\frac{a\pi}{3}x)$ مطابق شکل روبه‌رو است. مساحت چهارضلعی که رئوس آن نقاط A, B, C, D باشد، برابر کدام است؟ ($a > 0$)



۱۲a (۲)

۲۴ (۱)

۶a² (۴)

۱۲ (۳)

(ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ و ۳۶ - سخت)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به آن که دوره تناوب $y = \sin \alpha x$ برابر $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ و $a > 0$ است، پس:

$$AB = CD = T = \frac{2\pi}{\frac{a\pi}{3}} = \frac{6\pi}{a\pi} = \frac{6}{a}$$

از طرفی چهارضلعی ABCD یک متوازی‌الاضلاع است که فاصله ۲ خط افقی (ارتفاع متوازی‌الاضلاع) برابر اختلاف کمترین و بیش‌ترین مقدار تابع است، پس:

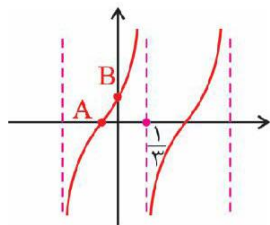
$$h = 2|a| \xrightarrow{a>0} h = 2a$$

$$S = AB \times 2a \Rightarrow S = \frac{6}{a} \times 2a = 12$$

یعنی مساحت، مستقل از مقدار a و برابر ۱۲ است.

گروه آموزشی ماز

13- هرگاه بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \tan(\frac{\pi}{a}x + \frac{\pi}{6})$ شکل روبه‌رو باشد، شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B چه عددی است؟



۲√۳ (۱)

۳√۳/۲ (۲)

۲√۳/۳ (۳)

√۳ (۴)

$x = \frac{1}{3}$ طول نقطه‌ای است که عبارت داخل تابع $y = \tan(\circ)$ به‌ازاء آن برابر $\frac{\pi}{6}$ خواهد شد زیرا $x = \frac{\pi}{6}$ اولین نقطه تعریف نشده تابع $y = \tan x$ با طول

$$\frac{\pi}{a} \times \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

مثبت است یعنی:

$$\Rightarrow \frac{1}{3a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{3a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} A \left| -\frac{1}{6} \right. \\ \left. \begin{array}{c} \sqrt{3} \\ 3 \end{array} \right. \\ B \left| \sqrt{3} \right. \\ \left. \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow m_{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{3}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \pi x + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$$

توجه: برای پیدا کردن طول نقطه A:

www.biomaze.ir

14 - تابع $f(x) = \frac{\pi}{3} - 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$ در بازه $(\frac{\Delta\pi}{8}, \alpha)$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار α کدام است؟

$$\frac{\Delta\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{9\pi}{8} \quad (2)$$

$$\frac{9\pi}{4} \quad (1)$$

(ریاضی ۳ - صفحه ۳۹ - سخت)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم تابع $y = \tan x$ در تمام دامنه‌اش یکتوا نیست به‌طوری‌که در بازه‌هایی چون $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ که $k \in \mathbb{Z}$ یکتواست. اما در تابع $y = \tan 2x$ این

بازه نصف می‌شود، یعنی حداکثر طول بازه‌ای که $y = \tan(2x + \beta)$ در آن یکتوای اکید است، $\frac{\pi}{2}$ است. با این مقدمه داریم:

$$f\left(\frac{\Delta\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{3} - 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Delta\pi}{4}\right)$$

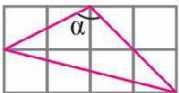
تابع در $x = \frac{\Delta\pi}{8}$ تعریف نشده است و کمان تابع تانژانت بر روی $\frac{3\pi}{4}$ قرار گرفته است پس α عددی است که مجدد تانژانت در آن تعریف نشود، یعنی کمان

تابع تانژانت پس از $\frac{3\pi}{4}$ ، روی $(2\pi + \frac{\pi}{4})$ قرار گیرد:

$$\frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\Delta\pi}{2}$$

$$2\alpha = \frac{\Delta\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha = \frac{9\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{9\pi}{8}$$

15 - در شکل زیر اگر ضلع هر مربع کوچک برابر واحد باشد. مقدار $\sin \alpha$ چه عددی است؟



$$\frac{3}{\sqrt{10}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

(ریاضی ۱- صفحه ۳۳ تا ۳۵- دشوار)

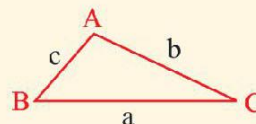
پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

در مثلث ABC

$$1) \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{cases}$$



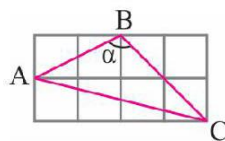
$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

$$AC = \sqrt{17} \quad AB = \sqrt{5} \quad BC = 2\sqrt{2}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \hat{B}$$

$$17 = 5 + 8 - 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{-4}{2\sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



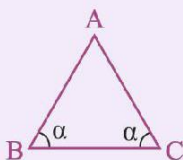
روش اول:

روش دوم: مساحت مثلث ABC را بدست می آوریم:

$$S_{ABC} = 8 - (1 + 2 + 2) = 3$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \alpha \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{2} \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

سوالات منتخب



در مثلث متساوی الساقین مقابل، اگر اندازه هر ساق x و مساحت آن $\frac{1}{3}x^2$ باشد، حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ چه عددی است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{15}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

www.biomaze.ir

16 - هرگاه $\sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(\pi + x) + 2 \sin^2 x = \cos 2(\frac{\pi}{4} - x)$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می تواند باشد؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

(ریاضی ۳- صفحه ۴۲ و ۴۳ / ریاضی ۲- صفحه ۸۰ تا ۸۷- متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

اتحادهای زیر را داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{4} + x) = \cos x$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + b + c = 0$ آنگاه $x = 1$ یا $x = \frac{c}{a}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos x$$

داریم:

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$-\cos^2 x + 2\sin^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

پس:

$$2\sin^2 x - \cos^2 x = \sin 2x$$

طرفین را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\tan^2 x - 1 = \tan 2x \Rightarrow 2\tan^2 x - \tan 2x - 1 = 0$$

$$\tan x = 1 \quad \tan x = -\frac{1}{2}$$

17- هرگاه $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$$\frac{2}{9} \quad (1)$$

$$\frac{-7}{9} \quad (2)$$

$$\frac{7}{9} \quad (3)$$

$$\frac{5}{9} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۴۲ و ۴۳- متوسط)

هر تست مازیک کلاس درس!

(۱) اگر $\sin \beta$ یا $\cos \beta$ داده شده باشد، آنگاه $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$ یا $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$

(۲)

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

اگر $\alpha - \frac{\pi}{4} = \beta$ آن‌گاه:

$$\sin \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin^2 2\alpha \Rightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}$$

سوالات منتخب

اگر $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ باشد، مقدار $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ ، چه عددی است؟

$$\frac{\sqrt{14} - 3}{9} \quad (1)$$

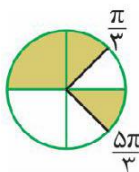
$$\frac{2\sqrt{14} + 3}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2\sqrt{14} - 5}{9} \quad (3)$$

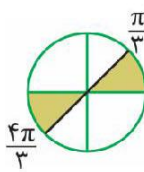
$$\frac{2\sqrt{14} + 5}{9} \quad (4)$$

www.biomaze.ir

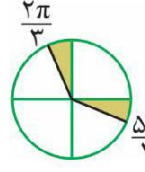
18- در کدام ناحیه از دایره مثلثاتی، مقادیر $\sin 2x$ کمتر از مقادیر $\sin x$ است؟



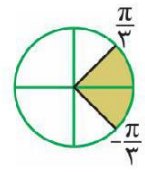
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi$$

$$\sin x < 0 \Rightarrow \pi < x < 2\pi$$

نکته ۱:

نکته ۲:

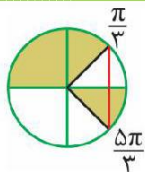
نکته ۳: در حل نامعادلات مثلثاتی هم مانند حل نامعادله‌های جبری باید دقت کنیم:

$$ac < bc \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \Rightarrow a < b \\ c < 0 \Rightarrow a > b \end{cases}$$

$$\sin 2x < \sin x \Rightarrow 2 \sin x \cos x < \sin x$$

$$\sin x > 0 \Rightarrow 2 \cos x < 1 \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\sin x < 0 \Rightarrow 2 \cos x > 1 \Rightarrow \cos x > \frac{1}{2}$$

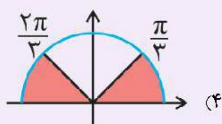


وقتی $\sin x > 0$ پس x در ناحیه اول یا دوم است و قرار است $\cos x < \frac{1}{2}$ باشد، پس $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ قابل قبول است.

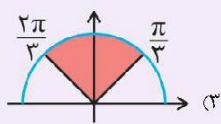
اگر $\sin x < 0$ یعنی x در نواحی سوم و چهارم است و از طرفی $\cos x > \frac{1}{2}$ است، پس $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$ قابل قبول است.

سوالات منتخب

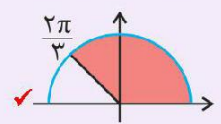
اگر $\cos 2x < \cos x$ و $0 < x < \pi$ باشد، کدام ناحیه، کمان x را به درستی نشان می‌دهد؟



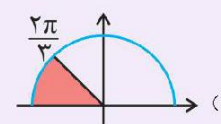
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

گروه آموزشی ماز

۱۹- تابع $y = 2 - 3 \sin(\alpha x - \frac{\pi}{3})$ به ازای $x = 3$ در اولین نقطه با طول مثبت به بیش‌ترین مقدار خودش می‌رسد، به ازای کدام مقدار، می‌تواند کم‌ترین مقدار خودش را اختیار کند؟

$$\frac{15}{11} \quad (۴)$$

$$\frac{69}{11} \quad (۳)$$

$$\frac{6}{11} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{11} \quad (۱)$$

$$y = a \pm b \sin cx \quad \begin{cases} \text{Max} = a + |b| \\ \text{Min} = a - |b| \\ T = \frac{2\pi}{|c|} \end{cases}$$

نکته:

دقت کنید عبارت $y = +\sin p(x)$ به شرطی بیشترین است که $p(x) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد و به شرطی کمترین است که $p(x) = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ و عبارت

$y = -\sin p(x)$ به شرطی بیشترین است که $p(x) = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ و به شرطی کمترین است که $p(x) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد و البته اگر توابع فوق در نقطه‌ای Max یا

Min باشد و به اندازه $\frac{T}{2}$ یا $kT + \frac{T}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) در طول نقطه تغییر ایجاد کنیم به ترتیب به Min یا Max خواهیم رسید.

عبارت در حالتی Max است که $\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})$ برابر ۱- باشد، پس $3\alpha - \frac{\pi}{3}$ باید $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ باشد.

$$3\alpha - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \xrightarrow{k=1} \alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{18} = \frac{11\pi}{18}$$

دقت کنید: $T = \frac{2\pi}{\frac{11\pi}{18}} = \frac{36}{11}$

اگر نصف دوره تناوب $(\frac{18}{11})$ از $x = 3$ ، جلو یا عقب برویم عبارت به کمترین مقدار خودش می‌رسد.

$$x = 3 - \frac{18}{11} = \frac{33-18}{11} = \frac{15}{11}$$

سؤالات منتخب

اگر دوره تناوب $y = 3 + 2a \sin \frac{\pi}{a} x$ برابر ۶ باشد، مقدار Max تابع کدام است؟ ($a > 0$)

۱۲ (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴)

www.biomaze.ir

20- هرگاه $\sin x = 2 \cos x$ و $\sin 2x = k \cos 2x$ باشد، مقدار k چقدر است؟

$-\frac{2}{3}$ (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی-۳ صفحه ۴۲، ۴۳ و ۴۸- دشوار)

نکته ۱:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

نکته ۲:

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin 2x = k \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = k(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

از طرفی طبق فرض $\sin x = 2 \cos x$ ، در فرمول فوق قرار می‌دهیم: و داریم:

$$\Rightarrow k = \frac{2(2 \cos x) \cdot \cos x}{\cos^2 x - 4 \cos^2 x} = \frac{4 \cos^2 x}{-3 \cos^2 x} = -\frac{4}{3}$$

سؤالات منتخب

اگر $\cos(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، مقدار $\cos(\frac{2\pi}{3} - 2x)$ چه عددی است؟

$\pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۱) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\pm \frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴)

گروه آموزشی ماز

21- اگر کوچکترین ریشه مثبت معادله $\sin 2x + k \sin^2 x = 2$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، بزرگترین ریشه آن در بازه $(0, 2\pi)$ کدام عدد است؟

$\frac{11\pi}{4}$ (۴) $\frac{7\pi}{2}$ (۳) $\frac{13\pi}{4}$ (۲) $\frac{15\pi}{4}$ (۱)

نکته ۱:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \gamma k \pi \pm \beta$$

$$\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma k \pi + \beta \\ \alpha = \gamma k \pi + \pi - \beta \end{cases}$$

$$\sin \gamma \alpha = \gamma \sin \alpha \cos \alpha$$

نکته ۲:

ریشه معادله است، پس: $\frac{\pi}{4}$

$$\sin \frac{\pi}{\gamma} + k \times \sin \gamma \left(\frac{\pi}{\gamma} \right) = \gamma \Rightarrow 1 + \frac{k}{\gamma} = \gamma \Rightarrow k = \gamma$$

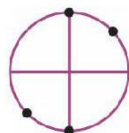
$$\sin \gamma x + \gamma \sin \gamma x = \gamma \Rightarrow \sin \gamma x = \gamma(1 - \sin \gamma x)$$

$$\gamma \sin x \cos x = \gamma \cos \gamma x \Rightarrow \begin{cases} \gamma \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \\ \sin x = \cos x \end{cases}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{\gamma}$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{\gamma} - x \right) \Rightarrow \begin{cases} x = \gamma k \pi + \frac{\pi}{\gamma} - x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{\gamma} \\ x = \gamma k \pi + \pi - \frac{\pi}{\gamma} + x \quad \times \end{cases}$$

پس جوابها را روی دایره مثلثاتی نمایش می‌دهیم.



$$\text{اولین جواب مثبت} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{بزرگترین ریشه قبل } 4\pi = 4\pi - \frac{\pi}{\gamma} = \frac{3\pi}{\gamma}$$

سوالات منتخب

جمع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

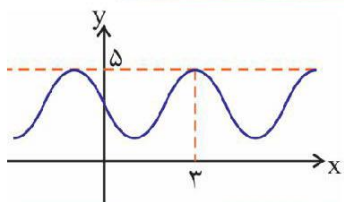
✓ ۱۱π (۴)

۱۰π (۳)

۹π (۲)

۸π (۱)

www.biomaze.ir

22- اگر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos(b\pi x + \frac{\pi}{3})$ شکل روبه‌رو باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$\frac{20}{9} (۲)$$

$$\frac{20}{3} (۱)$$

$$\frac{5}{3} (۴)$$

$$\frac{5}{9} (۳)$$

نکته:

$$f(x) = a + b \cos cx \Rightarrow \begin{cases} \text{Max} = a + |b| \\ \text{Min} = a - |b| \\ T = \frac{2\pi}{|c|} \end{cases}$$

$$\text{Max} = 5 \Rightarrow a + |b| = 5$$

$$\begin{cases} a > 0 & a = \frac{5}{3} \\ a < 0 & a = 5 \end{cases}$$

$$f(\cdot) = 2a + \frac{a}{3} = \frac{5}{3}a > 0 \Rightarrow a > 0$$

اما

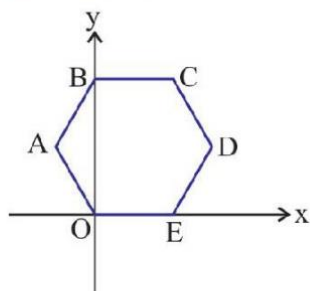
با توجه به نمودار $f(3) = 5$ ، پس:

$$f(3) = 2a + a \cos(3b\pi + \frac{\pi}{3}) = 5$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3} + \frac{a}{3} \cos(3b\pi + \frac{\pi}{3}) = 5 \Rightarrow \cos(3b\pi + \frac{\pi}{3}) = 1$$

$$3b\pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow 3b + \frac{1}{3} = 2 \Rightarrow 3b = \frac{5}{3} \Rightarrow b = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{5}{3} + \frac{5}{9} = \frac{20}{9}$$



23- در شکل مقابل، نقطه $B(0, 6\sqrt{3})$ یکی از رأس‌های شش ضلعی منتظم است. مختصات رأس D کدام است؟

(1) $(6 + \sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

(2) $(9, 3\sqrt{3})$

(3) $(6 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

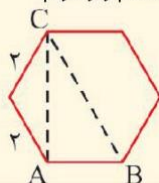
(4) $(9, 1 + \sqrt{3})$

(ریاضی ۱ - صفحه ۲۹ تا ۳۵ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

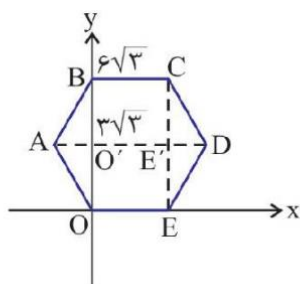
در هر شش ضلعی منتظم به طول ضلع a ، طول قطرهای بزرگ، $2a$ و طول قطرهای کوچک، $\sqrt{3}a$ است به عنوان مثال در شش ضلعی منتظم زیر داریم:



$$BC = 2 \times 2 = 4, \quad AC = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$$

عرض نقطه B که همان اندازه قطر کوچک شش ضلعی است برابر با $6\sqrt{3}$ است.

پس طول ضلع این شش ضلعی منتظم، برابر ۶ است و طول قطر بزرگ آن نیز برابر ۱۲ است. حال داریم:



$$\underbrace{AD}_{12} = \underbrace{AO'}_6 + \underbrace{O'E'}_6 + \underbrace{E'D}_6 \Rightarrow AO' + E'D = 6 \rightarrow \begin{cases} AO' = 3 \\ E'D = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_D = O'D = \underbrace{O'E'}_6 + \underbrace{E'D}_3 = 9, \quad y_D = 2\sqrt{3} \rightarrow D \begin{pmatrix} 9 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

سوالات منتخب

۱. مساحت شش ضلعی منتظم مقابل کدام است؟

(1) $8\sqrt{3}$

(2) $15\sqrt{3}$

(3) $10\sqrt{3}$

(4) $24\sqrt{3}$

۲. در شکل مقابل، مساحت شش ضلعی منتظم چند برابر مساحت مستطیل است؟

(1) $\frac{2}{3}$

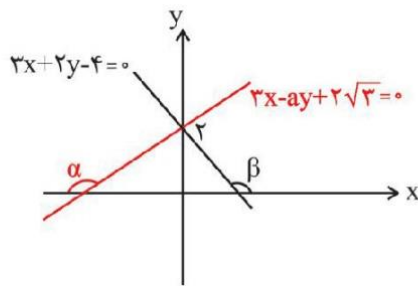
(2) $\frac{3}{4}$

(3) $\frac{5}{6}$

(4) $\frac{11}{12}$



24 - در شکل مقابل، مقدار $\sin(\alpha - \pi) + \tan\left(\frac{2\pi}{3} + 2\beta\right)$ کدام است؟



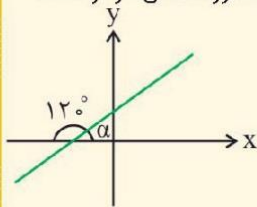
- (1) $\frac{5 + 6\sqrt{3}}{12}$
 (2) $\frac{13 + 6\sqrt{3}}{12}$
 (3) $-\frac{5 + 6\sqrt{3}}{12}$
 (4) $\frac{13 - 6\sqrt{3}}{12}$

(ریاضی ۲ - صفحه ۸۰ تا ۸۷ / ریاضی ۳ - صفحه ۴۲ و ۴۳ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۳

هر تست ماز یک کلاس درس!

یکی از روش‌های به‌دست آوردن شیب خط، استفاده از نسبت مثلثاتی تانژانت می‌باشد. هرگاه زاویه‌ای (α) که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد را داشته باشیم، شیب خط برابر با $\tan \alpha$ است.
 به عنوان مثال برای به‌دست آوردن شیب خط مقابل داریم:

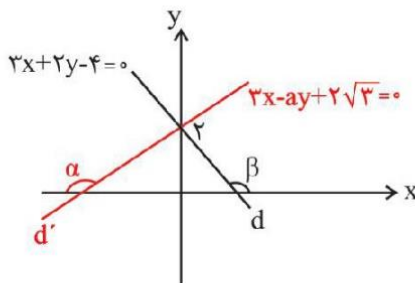


$$\text{شیب خط} = \tan \alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

ابتدا به سراغ نمودار داده شده می‌رویم و شیب خطوط را به‌دست می‌آوریم:

$$3x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow m_d = -\frac{3}{2} = \tan \beta$$

با توجه به این که نقطه $(0, 2)$ روی خط d' قرار دارد، داریم:



$$3(0) - 2(2) + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow m_{d'} = \sqrt{3} = \tan(\pi - \alpha) \Rightarrow \tan \alpha = -\sqrt{3}$$

حال با استفاده از روابط مثلثاتی عبارت خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\alpha - \pi) + \tan\left(\frac{2\pi}{3} + 2\beta\right) = -\sin \alpha - \cot 2\beta = -\left(\sin \alpha + \frac{1 - \tan^2 \beta}{2 \tan \beta}\right)$$

با توجه به این که $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ مقدار $\sin \alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ طبق شکل}} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال مقدار عبارت مورد نظر صورت سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$-\left(\sin \alpha + \frac{1 - \tan^2 \beta}{2 \tan \beta}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2}{2\left(-\frac{3}{2}\right)}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{12}\right) = -\frac{5 + 6\sqrt{3}}{12}$$

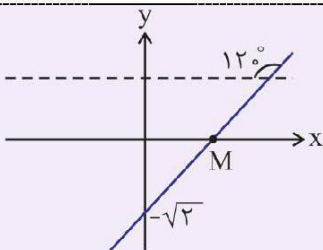
سوالات منتخب

۱. با توجه به نمودار مقابل، طول نقطه M کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) ۱
(۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

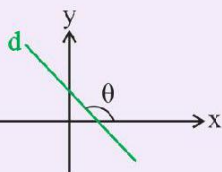


۲. نمودار خط d به معادله $3x + 2y = 4$ به صورت مقابل است. حاصل $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$

(۳) $-\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{3}{2}$



گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan 2\theta$ کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

(ریاضی ۳- صفحه ۴۲ و ۴۳- دشوار)

هرتست ماز یک کلاس درس!

برای به دست آوردن $\tan 2\theta$ با استفاده از $\tan \theta$ باید از رابطه $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ استفاده کرد.

مثال: اگر $\cot \theta = \frac{1}{2}$ باشد، آن گاه حاصل $\tan 2\theta$ را بدست آورید.

با توجه به اینکه $\cot \theta = \frac{1}{2}$ است پس $\tan \theta = 2$ می باشد و برای بدست آوردن حاصل عبارت داده شده داریم:

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

نکته:

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{cases}$$

$$\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta} = \frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1} = \frac{\sin \theta (1 + 2 \cos \theta)}{\cos \theta (1 + 2 \cos \theta)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

سوالات منتخب:

حاصل $\frac{\tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۲- حاصل $\frac{4 \tan^2 15^\circ}{1 - \tan^4 15^\circ}$ کدام است؟

✓ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{6}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۱)

www.biomaze.ir

26- اگر معادله مثلثاتی $\sin(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\sin x}{\cot x} = 0$ در بازه $[0, a]$ دارای ۴ جواب باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

$\frac{7\pi}{4}$ (۴)

$\frac{3\pi}{2}$ (۳)

$\frac{5\pi}{4}$ (۲)

π (۱)

(ریاضی ۳ - صفحه ۴۴ تا ۴۸ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای حل معادلات مثلثاتی ابتدا تا حد امکان معادله را ساده می‌کنیم و در نهایت دسته جواب مورد نظر سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

مثال: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \sin x = 0$ را به دست آورید.

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ابتدا معادله داده شده را ساده می‌کنیم و مجموعه جواب آن را به دست می‌آوریم:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin x}{\cot x} = 0 \Rightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = 0 \Rightarrow -\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{-\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{-\cos^2 x}{\cos x} = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0,1,2,3} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

با توجه به چهار جواب به دست آمده حداقل مقدار a برابر $\frac{7\pi}{4}$ است.

سؤالات منتخب:

۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin^3 x + \sin^2 x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟ (فارج ۹۷)

$\frac{(2k+1)\pi}{5}$ (۴)

$k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۳)

✓ $\frac{2k\pi}{5}$ (۲)

$\frac{k\pi}{5}$ (۱)

۲. جواب کلی معادله مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟

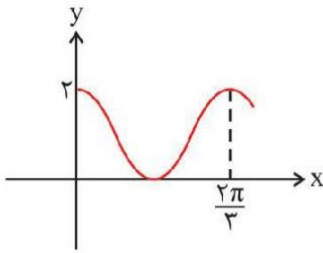
$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴)

✓ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳)

$x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲)

$x = k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۱)

27- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a - 2\sin^2 bx$ است. مقدار $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ کدام است؟



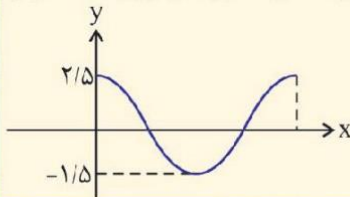
- (1) 1
(2) $\frac{3}{2}$
(3) 2
(4) $\frac{5}{2}$

(ریاضی ۳ - صفحه ۳۲ تا ۴۱ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر نمودار تابع $f(x) = a + b \cos x$ را داشته باشیم برای تعیین پارامترهای a و b باید به ماکزیمم و مینیمم نمودار توجه کنیم به عنوان مثال برای به دست آوردن پارامترهای a و b در تابع $y = a + b \cos 2x$ با توجه به نمودار مقابل داریم:



$$\begin{cases} a + b = 2/5 \\ a - b = -1/5 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 2$$

ابتدا ضابطه تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 1 + a - 2\sin^2 bx = a + 1 - 2\sin^2 bx = a + \cos 2bx$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است که با قرار دادن ۱ به جای کسینوس به دست می‌آید:

$$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی دوره تناوب تابع برابر $T = \frac{2\pi}{3}$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |2b| = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = 1 + \cos 3x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1 + \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

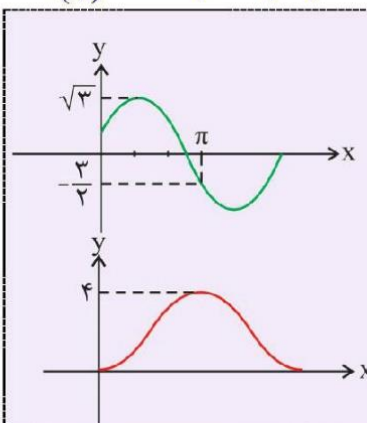
سوالات منتخب

۱. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. کدام است b ؟ (رافل ۹۸)

- (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) ۲


۲. شکل مقابل نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. کدام است b ؟ (رافل ۹۷)

- (1) -۱ (2) -۲ (3) ۱ (4) ۲



28- اگر $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\sin \theta (1 - \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\tan(\theta - \pi)}$ کدام است؟

(1) $\frac{5(2\sqrt{2}+1)}{11\sqrt{2}}$ (2) $\frac{-5(2\sqrt{2}+1)}{11\sqrt{2}}$ (3) $\frac{-7(2\sqrt{2}+1)}{12\sqrt{2}}$ (4) $\frac{5(2\sqrt{2}+1)}{12\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه 3  (ریاضی ۱، ریاضی ۲، ریاضی ۳ - صفحه ۴۲ تا ۴۶ ریاضی ۱، صفحه ۷۲ تا ۸۷ ریاضی ۲، صفحه ۴۲ و ۴۳ ریاضی ۳ - دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

سینوس و کسینوس زاویه 2α از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

با تقسیم رابطه $\sin 2\alpha$ بر $\cos 2\alpha$ رابطه $\tan 2\alpha$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

ابتدا رابطه $\sin \theta (1 - \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta}{4}$ را ساده می‌کنیم:

$$\sin \theta (1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{4} \Rightarrow 4 \sin \theta = 1 + \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{7}{9}$$

$$\frac{1}{\cos^2 2\theta} = 1 + \tan^2 2\theta \Rightarrow \frac{9}{49} = 1 + \tan^2 2\theta \Rightarrow \frac{32}{49} = \tan^2 2\theta$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}, \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) + \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\tan(\theta - \pi)} = \frac{-\cos \theta - \sin \theta}{-\tan(\pi - 2\theta)} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{4\sqrt{2}}{7}} = \frac{-7(2\sqrt{2}+1)}{12\sqrt{2}}$$

سوالات منتخب:

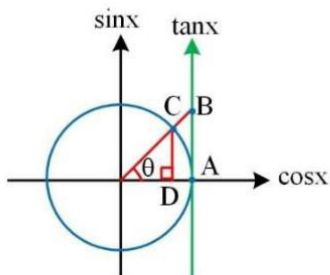
۱- حاصل عبارت $\frac{\sin 25.0^\circ + \sin 70.0^\circ}{\cos 56.0^\circ - \cos 11.0^\circ}$ با فرض $\tan 20.0^\circ = 0.4$ کدام است؟

(1) $-\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{7}{3}$  (4) $\frac{5}{8}$

۲- اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(2\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

(1) 2 (2) 3 (3) 4  (4) 5

29- در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، حاصل $\frac{|AB|+|BC|}{|CD|+|AD|}$ کدام است؟

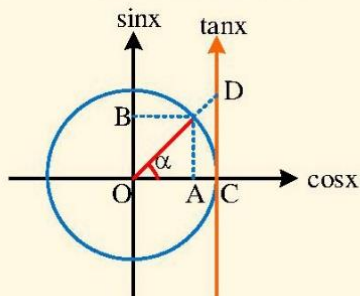


- (۱) $\frac{1}{\sin^2 \theta}$
- (۲) $\frac{1}{\cos^2 \theta}$
- (۳) $\frac{1}{\sin \theta}$
- (۴) $\frac{1}{\cos \theta}$

(ریاضی ۱، ریاضی ۳ - صفحه ۲۹ تا ۴۶ ریاضی ۱، صفحه ۳۷ تا ۳۹ ریاضی ۳ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۴

هر تست ماز یک کلاس درس!



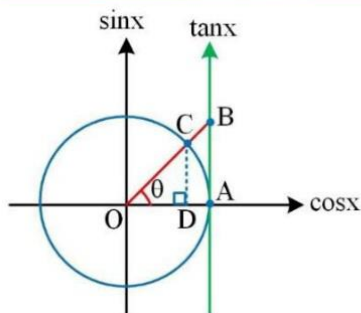
$$\sin \alpha = OB$$

$$\cos \alpha = OA$$

$$\tan \alpha = CD$$

در هر دایرهٔ مثلثاتی داریم:

با توجه به خواص دایره مثلثاتی داریم:



$$|AB| = \tan \theta$$

$$|CD| = \sin \theta$$

$$\begin{cases} |OA| = 1 \\ |OD| = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow |AD| = 1 - \cos \theta$$

$$\triangle OAB: |OA|^2 + |AB|^2 = |OB|^2 \Rightarrow (1)^2 + (\tan \theta)^2 = (OB)^2 \Rightarrow |OB| = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}, |OC| = 1 \Rightarrow |BC| = \frac{1}{\cos \theta} - 1 = \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{|AB|+|BC|}{|CD|+|AD|} = \frac{\tan \theta + \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}}{\sin \theta + 1 - \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}}{\sin \theta + 1 - \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta + 1 - \cos \theta}{\cos \theta}}{\sin \theta + 1 - \cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

سوالات منتخب:

۱- با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، مساحت مثلث OAB کدام است؟

(۱) $\tan \theta$

(۲) $\frac{1}{2} \cos \theta \times \tan \theta$

(۳) $\frac{1}{2} \tan \theta$ ✓

(۴) $\cos \theta \times \tan \theta$

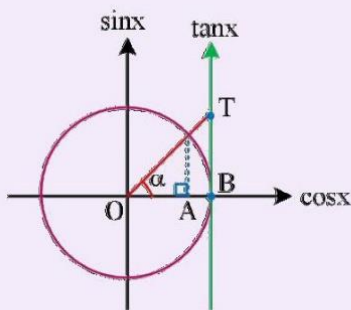
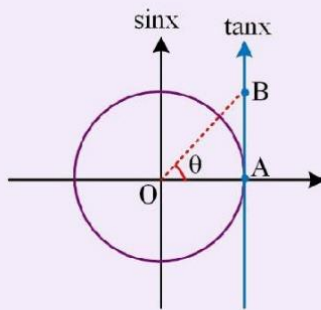
۲- در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $BT = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار OA چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ✓

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{3}$



www.biomaze.ir

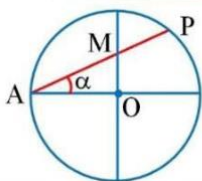
30- در دایره مثلثاتی مقابل، حاصل AP.OM کدام است؟

(۱) $2 \cos \alpha$

(۲) $2 \sin \alpha$

(۳) $\cos 2\alpha$

(۴) $\sin 2\alpha$

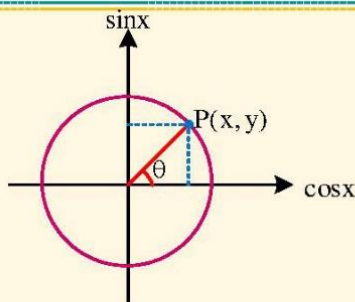


(ریاضی ۱، ریاضی ۳ - صفحه ۲۹ تا ۴۶ ریاضی ۱، صفحه ۴۲ و ۴۳ ریاضی ۳ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۲ ✓

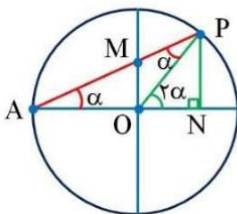
هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر P نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی باشد، خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} x &= \cos \theta \\ y &= \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

شعاع OP و ضلع NP را رسم کرده و با توجه به خواص دایره مثلثاتی داریم:



$$|OA| = |OP| = 1$$

$$\triangle ONP: \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{NP}{1} \Rightarrow |NP| = \sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha = \frac{ON}{1} \Rightarrow |ON| = \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$AOM: \tan \alpha = \frac{OM}{1} \Rightarrow |OM| = \tan \alpha$$

$$ANP: (AN)^2 + (NP)^2 = (AP)^2 \Rightarrow (1 + \cos 2\alpha)^2 + (\sin 2\alpha)^2 = AP^2 \Rightarrow 1 + 2\cos 2\alpha + \underbrace{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}_{=1} = AP^2$$

$$\Rightarrow 2(1 + \cos 2\alpha) = AP^2 \Rightarrow AP^2 = 4\cos^2 \alpha \Rightarrow |AP| = 2\cos \alpha$$

$$AP \cdot OM = (2\cos \alpha) \tan \alpha = 2\sin \alpha$$

سوالات منتخب:

۱- در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار $\tan \theta + \cot \theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{5}{2}$ ✓
 (۳) 2
 (۴) $\frac{3}{2}$

۲- در دایره مثلثاتی مقابل، حاصل $BD \times BA$ کدام است؟

(۱) $\sin \theta$
 (۲) $\cos \theta$
 (۳) $\sin^2 \theta$ ✓
 (۴) $\cos^2 \theta$

گروه آموزشی ماز

۳۱- اگر $\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\cot 2x} = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

(۴) $\frac{4}{3}$

(۳) $-\frac{3}{4}$

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(ریاضی ۳ - صفحه ۴۲ تا ۴۳ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۴

هر تست ماز یک کلاس درس!

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

مثال) ساده شده عبارت $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ}$ را به دست آورید.

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin(2 \times 10^\circ)}{\frac{1}{2} \times 2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 10^\circ} = 4 \cos 10^\circ$$

عبارت $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$ را جایگزین $\cot 2x$ می‌کنیم و داریم:

$$\frac{1}{\cos 2x} - \cot 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{(\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \cos x - 3 \sin x = \cos x + \sin x \Rightarrow 2 \cos x = 4 \sin x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(\frac{1}{2})}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$$

سوال‌ات منتخب:

۱- اگر $\frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = 3$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) ✓

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۱)

۲- اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم باشد، ساده شده عبارت $\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$ کدام است؟

$-\cot \alpha$ (۴)

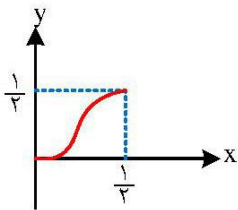
$\cot \alpha$ (۳)

$-\tan \alpha$ (۲) ✓

$\tan \alpha$ (۱)

www.biomaze.ir

32- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{a}{\tan^2 bx + \cot^2 bx + 2}$ است. مقدار تابع به ازای $x = \frac{1}{3}$ کدام است؟



- $\frac{3}{5}$ (۱)
- $\frac{2}{3}$ (۲)
- $\frac{3}{8}$ (۳)
- $\frac{3}{11}$ (۴)

(ریاضی ۲، ریاضی ۳ - صفحه ۸۸ تا ۹۴ ریاضی ۲، صفحه ۳۲ تا ۴۱ ریاضی ۳ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۳ ✓

هر تست ماز یک کلاس درس!

بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ با قرار دادن ۱ یا -۱ به جای سینوس و کسینوس به دست می‌آید، پس:

$$\max(y) = |a| + d \quad \min(y) = -|a| + d$$

مثال $y = -2 \cos x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \max(y) = |-2| + 3 = 5 \\ \min(y) = -|-2| + 3 = 1 \end{cases}$

واضح است که مقدار d برابر میانگین مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی فوق است:

$$d = \frac{\max(y) + \min(y)}{2}$$

به طور مثال اگر در تابع مثلثاتی $y = -a \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + d$ مقدار ماکزیمم تابع برابر ۸ و مقدار مینیمم آن برابر -۲ باشد، مقدار d به صورت زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{\max(y) + \min(y)}{2} = \frac{8 + (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ابتدا با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای تابع را به صورت $y = \frac{a}{(\tan bx + \cot bx)^2}$ بازنویسی می‌کنیم و سپس از اتحاد مثلثاتی $\tan \theta + \cot \theta = \frac{2}{\sin 2\theta}$ خواهیم داشت:

$$y = \frac{a}{(\tan bx + \cot bx)^2} = \frac{a}{\left(\frac{2}{\sin 2bx}\right)^2} = \frac{a \sin^2 2bx}{4}$$

حال با استفاده از اتحاد $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ داریم:

$$y = \frac{a \sin^2 2bx}{4} = \frac{a}{4} \times \left(\frac{1 - \cos 4bx}{2}\right) = \frac{a}{8}(1 - \cos 4bx)$$

$$\frac{2\pi}{|4b|} = 1 \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{2}$$

با توجه به نمودار تابع داریم: $\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$ ، یعنی $T = 1$ است، پس:

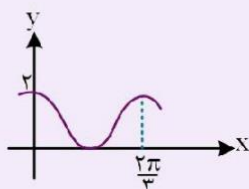
پس ضابطه تابع به صورت $y = \frac{a}{8}(1 - \cos 2\pi x)$ خواهد بود، از طرفی نقطه به مختصات $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ روی نمودار قرار دارد، پس با قرار دادن آن در ضابطه تابع خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{8}(1 - \cos \pi) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(1 - \cos 2\pi x)$$

$$y = \frac{1}{4}(1 - \cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

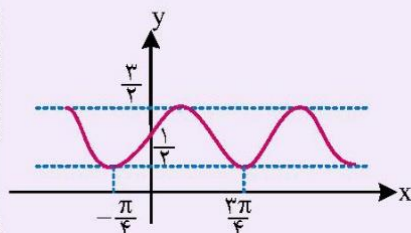
پس مقدار تابع به ازای $x = \frac{1}{3}$ برابر است با:

سوالانت منتخب:



۱- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار $f(x) = a + \cos^2 bx - \sin^2 bx$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{9})$ کدام است؟

- ☒ ۱/۵ (۱)
- ☐ $\sqrt{3}$ (۲)
- ☐ $\sqrt{2}$ (۳)
- ☐ 0.75 (۴)

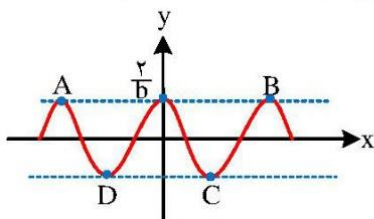


۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام $a + b$ می‌تواند باشد؟

- ☐ ۱ (۱)
- ☐ $\frac{3}{2}$ (۲)
- ☒ ۲ (۳)
- ☐ ۳ (۴)

گروه آموزشی ماز

۳۳- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار $y = a \sin \pi(\frac{1}{4} + bx)$ است. اگر مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۱۲ باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟



- ☐ ۱ (۱)
- ☐ ۲ (۲)
- ☐ $\frac{5}{2}$ (۳)
- ☐ ۳ (۴)

ابتدا تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{4} + bx)$ را ساده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$y = a \sin(\frac{\pi}{4} + b\pi x) = a \cos(b\pi x)$$

با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر $\frac{2}{b}$ است، برای آنکه ماکزیمم $a \cos(b\pi x)$ را بدست بیاوریم به جای $\cos(b\pi x)$ ، ۱ قرار می‌دهیم و برای آنکه مینیمم

تابع را بدست بیاوریم به جای $\cos(b\pi x)$ ، -1 قرار می‌دهیم، پس مینیمم تابع $-\frac{2}{b}$ خواهد بود و داریم:

$$a \cos(b\pi x) = \frac{2}{b} \Rightarrow a = \frac{2}{b} \quad (1)$$

با توجه به نمودار، اگر T دوره تناوب تابع $y = a \cos(b\pi x)$ باشد، $AB = 2T$ و $CD = T$ است و با توجه به آن که مساحت ذوزنقه $ABCD$ برابر ۱۲ است داریم:

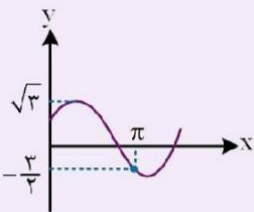
$$\frac{1}{2} \times (AB + CD) \times \left(\frac{2}{b}\right) = 12 \Rightarrow \frac{1}{2} \times (2T + T) \times \left(\frac{2}{b}\right) = 12 \Rightarrow \frac{3T}{b} = 12 \Rightarrow T = 4b$$

همچنین می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos(b\pi x)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4b \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{(1)} a = \frac{2}{b} = \frac{2}{1} \Rightarrow a - b = 2 - 1 = 1$$

سوالات منتخب:

۱- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است، کدام b است؟



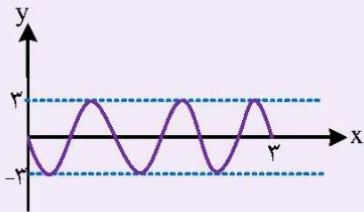
(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$ ✓

(۴) ۲

۲- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos \pi(\frac{1}{4} - bx)$ است. کدام $a.b$ است؟



(۱) -6 ✓

(۲) -3

(۳) $4/5$

(۴) ۶

www.biomaze.ir

۳۴- مجموع ریشه‌های معادله $(1 - \cot^2 x)(\tan 2x - \sin 2x) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۴) 3π

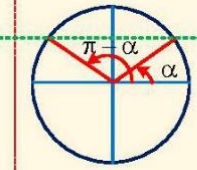
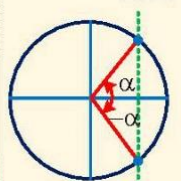
(۳) $\frac{3\pi}{2}$

(۲) 2π

(۱) $\frac{\pi}{2}$

هر تست ماز یک کلاس درس!

با توجه به دایره مثلثاتی، جواب کلی معادله‌های $\cos x = \cos \alpha$ ، $\sin x = \sin \alpha$ به صورت زیر است:

$\sin x = \sin \alpha$	$\cos x = \cos \alpha$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha & ; k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$	 $\Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha ; k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(مثال) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin x$ را به دست آورید.

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

در این معادلات باید ضریب هر دو طرف تساوی مثبت یک باشد، بنابراین برای حل معادله‌های $\sin x = -\sin \alpha$ و $\cos x = -\cos \alpha$ می‌توانیم ضریب منفی را با کمک روابط $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ و $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$ از بین ببریم.

(مثال) جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = -\cos x$ را به دست آورید.

در سمت راست معادله، به جای $-\cos x$ می‌نویسیم $\cos(\pi - x)$ و داریم:

$$\cos 2x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\pi - x) \\ 2x = 2k\pi - (\pi - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$(\tan 2x - \sin 2x)(1 - \cot^2 x) = -1 \Rightarrow \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x\right)\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -1 \Rightarrow \left(\frac{\sin 2x - \sin 2x \cos 2x}{\cos 2x}\right)\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{\cos 2x}\right)\left(\frac{-\cos 2x}{\sin^2 x}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{\sin^2 x} = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ برابر 3π است.

35- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) $\frac{7\pi}{2}$ (۴) 5π

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۳ تا ۴۸ - دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

حالت‌های خاص معادله کسینوسی		حالت‌های خاص سینوسی	
معادله	مجموعه جواب	معادله	مجموعه جواب
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$	$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$	$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

ابتدا معادله داده شده را به صورت زیر نوشته و سپس مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x(1+\sin x) + \cos x(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\sin x)} = 1 \Rightarrow \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x}{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x} = 1$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow \frac{1 + \sin x \cos x}{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1 + \sin x \cos x}{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sin x} + \cancel{\cos x} + 1 = 1 + \cancel{\sin x} + \cancel{\cos x} + \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	✓	✓	✗	✗	✓

$$\Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

آیا همه جواب‌های به دست آمده قابل قبول هستند؟ جواب منفی است. اگر به معادله اصلی دقت کنید متوجه خواهید شد که مخرج کسرهای آن نباید صفر باشد، به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} 1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq (2k+1)\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x \neq \pi \\ 1 + \sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x \neq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین از جواب‌های به دست آمده فقط $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ قابل قبول هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است. پس گزینه ۱ صحیح است.

36- حاصل عبارت $\frac{(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12})^2 \times (\tan \frac{\pi}{12} - \cot \frac{\pi}{12})^2}{(\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12})^2 \times (\tan \frac{\pi}{12} + \cot \frac{\pi}{12})^2}$ کدام است؟

(۱) $0/25$ (۲) $0/25$ (۳) $-1/5$ (۴) 1

(ریاضی ۳ و ریاضی ۱ - صفحه ۴۲ الی ۴۳ ریاضی ۳، صفحه ۴۲ الی ۴۵ ریاضی ۱- دشوار)

پاسخ: گزینه ۲

هر تست ماز یک کلاس درس!

- هرگاه $\sin x \pm \cos x$ داشتیم به توان ۲ می‌رسانیم.
- هرگاه $\tan x \pm \cot x$ داشتیم به صورت سینوس و کسینوس نوشته و مخرج مشترک می‌گیریم.

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

$$(\tan x + \cot x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$(\tan x - \cot x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x$$

$$\frac{(1 - \sin \frac{\pi}{6}) \times (-2 \cot \frac{\pi}{6})^2}{(1 + \sin \frac{\pi}{6}) \times (\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}})^2} = \frac{(1 - \frac{1}{2}) \times (-2\sqrt{3})^2}{(1 + \frac{1}{2}) \times (\frac{2}{\frac{1}{2}})^2} = \frac{\frac{1}{2} \times 12}{\frac{3}{2} \times 16} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0/25$$

طبق درسنامه:

سوالات منتخب:

اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل $(\sin x - \cos x)^2$ کدام است؟

(۱) $\frac{49}{25}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{36}{25}$ (۴) 1

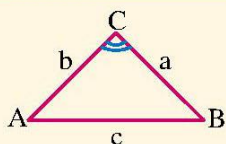
37- در مثلثی که زاویه حاده آن از برخورد دو ضلع به طول‌های ۶ و ۸ ساخته شده است، مساحت برابر $12\sqrt{3}$ می‌باشد. طول ضلع سوم کدام است؟

(۱) $2\sqrt{27}$ (۲) $2\sqrt{19}$ (۳) $2\sqrt{31}$ (۴) $2\sqrt{13}$

(ریاضی ۱ - صفحه ۲۹ الی ۳۵ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴

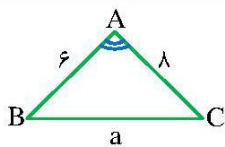
هر تست ماز یک کلاس درس!



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

کاربرد مثلثات در مثلث:



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin \hat{A} = 12\sqrt{3} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{چون زاویه A حاده است}} \hat{A} = 60^\circ$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$$

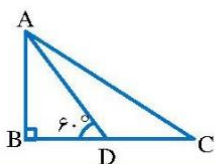
$$a^2 = 6^2 + 8^2 - 2(6)(8) \cdot \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} \Rightarrow a^2 = 36 + 64 - 48 \Rightarrow a^2 = 52 \Rightarrow a = \sqrt{52} \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$$

سوالات منتخب:

طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۹ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{2}{3}$ است. مساحت مثلث کدام است؟

(۱) $6\sqrt{5}$ (۲) $9\sqrt{5}$ (۳) $12\sqrt{5}$ (۴) $18\sqrt{5}$

38- در مثلث قائم‌الزاویه ABC اگر $DC=30$ و AD نیمساز باشد، اندازه ضلع AB چه عددی است؟



(۲) $15\sqrt{3}$
(۴) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

(۱) $15\sqrt{2}$
(۳) $\frac{15\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحه ۲۹ تا ۳۲ - متوسط)

پایه ششم

با توجه به آن که پاره خط AD نیمساز است، پس:

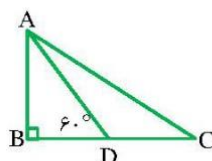
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$\triangle ABC: \tan \hat{C} = \frac{AB}{BD+DC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{BD+30}$$

$$\triangle ABD: \tan \hat{D} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AB = \sqrt{3}BD$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}BD}{BD+30} \Rightarrow 3BD = BD+30 \Rightarrow BD = 15$$

$$\Rightarrow AB = 15\sqrt{3}$$



گروه آموزشی ماز

39- اگر $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{12}$ و $A = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ، حدود A کدام است؟

(۴) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

(۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(۲) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

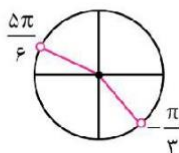
(۱) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۳ - متوسط)

پایه ششم

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{5\pi}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 2\alpha \leq 1$$



اگر به دایره مثلثاتی دقت کنید تغییرات $\cos 2\alpha$ مشخص می‌شود.

گروه آموزشی ماز

40- مقدار $\cos 2\theta$ چه عددی است؟ $\frac{\sin \frac{2\pi}{3} + \tan \theta}{\cos(\frac{17\pi}{3}) + \cos(\frac{-\pi}{6})} = 1$

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۱) $-\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ - صفحه ۸۰ تا ۸۴ / ریاضی ۳ - صفحه ۴۳ - متوسط)

پایه ششم

مقدار هر یک از نسبت‌ها را جایگذاری می‌کنیم:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{13\pi}{3} &= \cos(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{-\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \tan \theta}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 2 \tan \theta}{1 + \sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

گروه آموزشی ماز

41 - هرگاه انتهای کمان x در ناحیه دوم و $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 2$ باشد، ساده شده $\frac{\tan(\frac{\pi}{2} - x) - \cot(\pi - x)}{\cot(\frac{3\pi}{2} - x) + 2 \tan(2\pi - x)}$ کدام است؟

(1) $-\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{8}$ (3) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(ریاضی ۲ - صفحه ۸۰ تا ۸۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 2 \Rightarrow 1 - \cos x = 2 + 2 \cos x \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} \tan(\frac{\pi}{2} - x) &= \cot x \\ \cot(\pi - x) &= -\cot x \Rightarrow \text{عبارت} = \frac{2 \cot x}{-\tan x} \\ \cot(\frac{3\pi}{2} - x) &= \tan x \\ \tan(2\pi - x) &= -\tan x \\ \text{عبارت} &= \frac{-2}{\tan^2 x} = \frac{-2}{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

با توجه به آن که $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 8$ پس: $\tan x = -2\sqrt{2}$ در ناحیه دوم است،

گروه آموزشی ماز

4243 - اگر $1 = 3 \sin x \cos x$ ، مقدار $\tan^2 x + \cot^2 x$ چه عددی است؟

(1) 9 (2) 11 (3) 7 (4) 13

(ریاضی ۱ - صفحه ۴۲ تا ۴۵ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی:

$$3 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \times \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cot x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 - 2$$

از طرفی:

$$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2 - 2 = 9$$

گروه آموزشی ماز

43 - هرگاه دو عبارت $A = \sqrt{2} \cos \frac{-17\pi}{4} + a \sin \frac{19\pi}{3}$ و $B = 2 \tan \frac{7\pi}{4} - 3 \cos \frac{-8\pi}{3}$ در شرط $A + 2B = \sqrt{3}$ صدق کنند، مقدار a کدام است؟

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(ریاضی ۲ - صفحه ۸۰ تا ۸۴ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

ابتدا A و B را ساده می‌کنیم.

$$A = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{17\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + a \sin\left(\frac{19\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow A = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + a \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = 2 \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos\left(-3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow B = -2 + 3 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$A + 2B = \sqrt{3} \Rightarrow 1 + \frac{a\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

گروه آموزشی ماز

44 - اگر $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 8$ ، مقدار $\tan^2 x$ چه عددی است؟

(1) $\pm\sqrt{3}$ (2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) ± 1 (4) ± 2

(ریاضی ۳ - صفحه ۴۳ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{(\sin x \cos x)^2}$$

$$= \frac{4}{\sin^2 2x} \Rightarrow \frac{4}{\sin^2 2x} = 8 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan 2x = \pm 1$$

گروه آموزشی ماز

45 - اگر $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$ و $B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$ ، مقدار $A - B$ چه عددی است؟

(1) $\sqrt{2}$ (2) $-\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{2}$ (4) صفر

(ریاضی ۳ - صفحه ۴۳ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

روش اول:

$$A - B = \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

اما می‌دانیم $\cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos 2\beta$ ، پس:

$$A - B = \cos^2 \frac{7\pi}{8} - \sin^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

$$A - B = \cos \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

پس $A = B$

روش دوم:

$$\sin \frac{7\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$A = \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = 1, \quad B = \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

$$A = B = 1$$

گروه آموزشی ماز

46 - حاصل جمع حداقل مقدار $A = 3 - 2\sin^2 x$ و حداکثر مقدار $B = \frac{9}{3 + \cos^2 x}$ چه عددی است؟

$$\frac{13}{4} \quad (4)$$

$$5/5 \quad (3)$$

$$\frac{21}{4} \quad (2)$$

$$7/5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحه ۳۸ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$-1 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\sin^2 x \leq 0 \Rightarrow 1 \leq A \leq 3$$

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 3 + \cos^2 x \leq 4$$

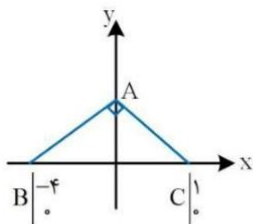
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 + \cos^2 x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{4} \leq B \leq \frac{9}{2}$$

$$\min A = 1$$

$$\max B = 9/2 \Rightarrow \max B + \min A = 5/2$$

گروه آموزشی ماز

47 - با توجه به شکل روبه‌رو، مقدار $\tan \hat{B} - \tan \hat{C}$ چه عددی است؟



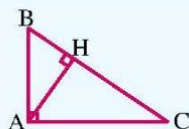
$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحه ۳۰ تا ۳۲ - ساده)



نکته:

در مثلث قائم‌الزاویه رابطه $AH^2 = BH \cdot CH$ برقرار است.

پاسخ تشریحی:

چون مثلث ABC در رأس A قائمه است و $OC = 1$ و $OB = 4$ پس $OA = 2$ به همین جهت:

$$\tan \hat{C} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \tan \hat{B} - \tan \hat{C} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

48 - اگر $\sin^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$ حاصل $\cos^2 x + \sin x$ چه عددی است؟

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2\sqrt{3}+1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{4} \quad (1)$$

با توجه به آن که $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم:

$$1 - \cos^2 x + \cos x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = 0$$

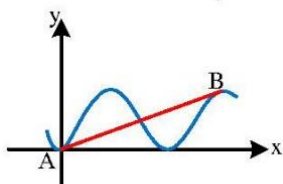
$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال در عبارت $\cos^2 x + \sin x$ مقادیر بدست آمده را جایگزین می‌کنیم.

$$\cos^2 x + \sin x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

گروه آموزشی ماز

49 - قسمتی از نمودار $f(x) = a - b \cos \frac{\pi}{4}x$ مطابق شکل مقابل است. اگر شیب پاره خط AB برابر $\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\lambda}{3}\right)$ چه عددی است؟



- (۱) $\frac{27}{2}$
(۲) $4/5$
(۳) $\frac{27}{4}$
(۴) $2/25$

با توجه به آن که دوره تناوب $f(x) = \cos ax$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس دوره تناوب f برابر $T = \frac{2\pi}{\pi/4}$ است یعنی $T = 4$ به این ترتیب:

$$x_B = 1/\Delta T \Rightarrow x_B = 6$$

$$m_{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{y_B}{x_B} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{y_B}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow y_B = 9$$

چون:

$$\max f = 9 \Rightarrow a + |b| = 9$$

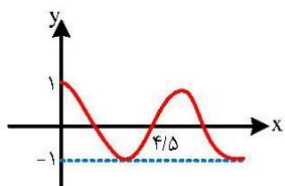
$$\min f = 0 \Rightarrow a - |b| = 0 \Rightarrow |b| = a \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

از طرفی $b > 0$ ، پس: $a = b = 4/5$

$$f\left(\frac{\lambda}{3}\right) = 4/5 - 4/5 \cos \frac{\pi}{4} \times \frac{\lambda}{3} = 4/5 - 4/5 \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

گروه آموزشی ماز

50 - بخشی از نمودار $f(x) = a + b \sin^2 cx$ مطابق شکل روبه‌رو است. مقدار bc چه عددی است؟



- (۱) $\pm \frac{\pi}{6}$
(۲) $\pm \frac{\pi}{3}$
(۳) $\pm \frac{\pi}{4}$
(۴) $\pm \frac{\pi}{2}$

- (۱) $-\frac{\pi}{6}$
(۲) $-\frac{\pi}{3}$
(۳) $-\frac{\pi}{4}$
(۴) $-\frac{\pi}{2}$

پاسخ تشریحی:

با توجه به مقادیر min و max داریم: $f(0) = 1 \Rightarrow a = 1$

$$\min = -1 \xrightarrow{b < 0} 1 + b = -1 \Rightarrow b = -2$$

دقت کنید اگر $b > 0$ باشد، آن‌گاه حداقل مقدار تابع $y = 1$ می‌شد اما اگر $b < 0$ حداکثر مقدار تابع $y = 1$ است که قابل قبول است.

$$f(\pi/5) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = 0 \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{5} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به آن‌که $\pi/5$ دومین ریشه مثبت $f(x) = 0$ است و در واقع دومین نقطه‌ای است که $\sin \frac{\pi}{5} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ پس اولین نقطه حالتی است که $\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4}$

و دومین نقطه $\frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{4}$ پس: $c = \frac{\pi}{6}$ همچنین توجه داشته باشید $c = \frac{-\pi}{6}$ نیز قابل قبول است، پس: $bc = \pm \frac{\pi}{3}$

گروه آموزشی ماز

51 - دوره تناوب $f(x) = 3a + 4 - a \cos \frac{\pi}{2a} x$ نصف بیشترین مقدار آن است. کم‌ترین مقدار آن چه عددی است؟ ($a > 0$)

۶ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

نکته:

$$f(x) = a \pm b \cos cx \Rightarrow \begin{cases} \max = a + |b| \\ \min = a - |b| \\ T = \frac{2\pi}{|c|} \end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2a}} = 4|a| = 4a$$

$$\max = 3a + 4 + |a| \xrightarrow{a > 0} \max = 4a + 4$$

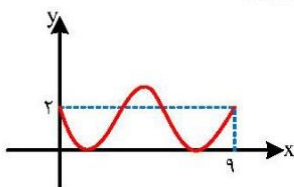
$$\min = 3a + 4 - |a| \Rightarrow \min = 2a + 4$$

$$4a = \frac{1}{2} \max \Rightarrow 4a = 2a + 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \min = 6$$

گروه آموزشی ماز

52 - بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + 2 \cos(b\pi x + \frac{3\pi}{4})$ مطابق شکل روبه‌رو است. مقدار $f(\frac{19}{4})$ چه عددی است؟



۳ (۱)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (۴)

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = a + r \sin b\pi x \quad f(\cdot) = r \Rightarrow a = r$$

$$1/\Delta T = 9 \Rightarrow T = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{r\pi}{|b\pi|} = \frac{1}{9} \Rightarrow |b| = \frac{1}{r}$$

با توجه به اینکه $b < 0$ ، پس $b = -\frac{1}{r}$ ، پس $f(x) = r - r \sin \frac{\pi x}{r}$

$$f\left(\frac{19}{r}\right) = r - r \sin \frac{\pi}{r} \times \frac{19}{r} = r(1 - \sin \frac{19\pi}{r}) = r(1 + \frac{1}{r}) = 3$$

گروه آموزشی ماز

53 - مجموع جواب‌های $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1$ در بازه $(0, 2\pi)$ چه عددی است؟

۲π (۴)

۲π (۳)

$\frac{5\pi}{2}$ (۲)

$\frac{7\pi}{2}$ (۱)

پاسخ تشریحی:

$$(x + \frac{\pi}{4}) - (x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

با توجه به آن که:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} + (x - \frac{\pi}{4})) = -\sin(x - \frac{\pi}{4})$$

پس:

$$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\sin^2(x - \frac{\pi}{4})$$

$$-\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \pm 1$$

به همین جهت:

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x \in (0, 2\pi) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \text{جمع} = \frac{5\pi}{2}$$

گروه آموزشی ماز

54 - نمودار تابع $f(x) = -2 \cos(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{3}x)$ در بازه $(0, \alpha)$ در دو نقطه دارای بیشترین مقدار است. حداکثر مقدار α چه عددی است؟

$\frac{123}{\lambda}$ (۴)

$\frac{75}{\lambda}$ (۳)

$\frac{94}{\lambda}$ (۲)

$\frac{59}{\lambda}$ (۱)

پاسخ تشریحی:

$$\cos(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{3}x) = -1$$

برای آن که تابع دارای بیشترین مقدار باشد باید

یعنی:

$$\frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{3}x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \frac{1}{\lambda} - \frac{x}{3} = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{x}{3} = 2k + \frac{2}{3} \Rightarrow x = -6k - \frac{2}{3}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = 6 - \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

چون $x > 0$ ، پس:

$$k = -2 \Rightarrow x = +12 - \frac{21}{8} = \frac{75}{8}$$

$$k = -3 \Rightarrow x = 18 - \frac{21}{8} = \frac{123}{8}$$

پس حداکثر α برابر $\frac{123}{8}$ است. دقت کنید تا سومین max باید برسیم.

گروه آموزشی ماز

55 - سومین جواب مثبت معادله مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ چه عددی است؟

$$\frac{14\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{10\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۶ و ۴۸ - متوسط)

نکته:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

پاسخ تشریحی:

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \quad \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$$

$$\cos x = 2 \rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$$

گروه آموزشی ماز

56 - اگر $x = \frac{\pi}{3}$ یکی از جواب‌های معادله مثلثاتی $a\cos x + 2\cos^2 x = 0$ باشد، جمع جواب‌های آن در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$\frac{10\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (3)$$

$$4\pi \quad (2)$$

$$2\pi \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۶ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

$\frac{\pi}{3}$ جواب معادله است پس در معادله صدق می‌کند. به همین جهت:

$$a \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$2\cos x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$2x = 2k\pi + \pi - x \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

$$0 < x < 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \text{جمع} = 3\pi$$

گروه آموزشی ماز

57 - جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 x - 4\cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$



نکته:

اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ برقرار است.

پایه ششم

$$2\sin^2 x - 4(1 - 2\sin^2 x) = 1 \Rightarrow 1 \cdot \sin^2 x = 5 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

نکته:



$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta \Rightarrow \alpha = k\pi \pm \beta$$

$$\sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

یا به عبارت دیگر: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

58- ساده شده $(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)(1 + \cot^2 \alpha) + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ در کدام گزینه آمده است؟

- (1) $2 \cos^2 \alpha$ (2) $\frac{2}{\sin^2 \alpha}$ (3) $2 \sin^2 \alpha$ (4) 2

پاسخ: گزینه 4 (ریاضی 1 - صفحه 44 تا 46 - متوسط)

نکته:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

پایه ششم

ابتدا عبارت $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم و داریم:

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha) = 2 \sin^2 \alpha - 1$$

پس با توجه به آن که $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ داریم:

$$(2 \sin^2 \alpha - 1) \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \text{حاصل} = 2 - \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 2$$

گروه آموزشی ماز

59- اختلاف کم‌ترین و بیشترین مقدار عبارت $A(x) = \frac{4 \cos x + 1}{2 \cos x + 3}$ چه عددی است؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

پاسخ: گزینه 4 (ریاضی 1 - صفحه 38 - متوسط)

پایه ششم

$$A(x) = \frac{4 \cos x + 1}{2 \cos x + 3} = \frac{4 \cos x + 6 - 5}{2 \cos x + 3} = 2 - \frac{5}{2 \cos x + 3}$$

با توجه به آن که $-1 \leq \cos x \leq 1$ داریم:

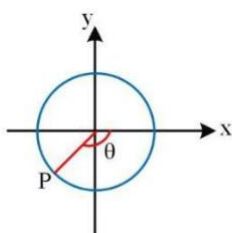
$$-2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2 \cos x + 3 \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2 \cos x + 3} \leq 1 \Rightarrow -5 \leq \frac{-5}{2 \cos x + 3} \leq -1$$

$$\Rightarrow -3 \leq 2 - \frac{5}{2 \cos x + 3} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \max = 1 \\ \min = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 4$$

گروه آموزشی ماز

60- نقطه $P(x, \sqrt{3}x)$ در ربع سوم روی دایره مثلثاتی قرار گرفته است. مقدار $\tan \theta$ چه عددی است؟

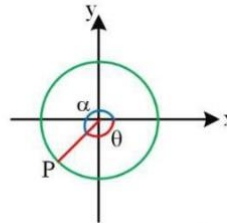
- (1) $-\sqrt{3}$ (2) -2 (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $-\frac{4}{3}$



پاسخ تشریحی:

چون P روی دایره مثلثاتی قرار گرفته است، پس $P \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ که در آن α زاویه‌ای است که از $x=0$ تا نقطه P باز شده است. در شکل دقت کنید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



P در ناحیه سوم قرار گرفته است، پس $x_2 = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است. لذا $P \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ یعنی $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ پس $\alpha = 240^\circ$ ، پس $\theta = 120^\circ$. به این ترتیب:

$$\tan \theta = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

61- اگر $\cos(\frac{5\pi}{4} - x) = 2 \cos(x - 3\pi)$ ، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{4} - x)$ چه عددی است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ تشریحی:

در ابتدا فرض را ساده‌تر می‌کنیم و داریم:

$$\cos(\frac{5\pi}{4} - x) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4} - x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sin x$$

$$2 \cos(x - 3\pi) = 2 \cos(x - \pi - 2\pi) = 2 \cos(x - \pi) = -2 \cos x$$

$$\sin x = -2 \cos x \Rightarrow \tan x = -2$$

پس:

$$\tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cot x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \tan(\frac{3\pi}{4} - x) = -\frac{1}{2}$$

از طرفی:

گروه آموزشی ماز

62- اگر $15^\circ < x < 30^\circ$ به طوری که $\cos(2x - 15^\circ) = \frac{2 - 2m}{3}$ ، حدود m کدام است؟

 $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ (۴) $[-\sqrt{2}, 2]$ (۳) $[0, \frac{2 - \sqrt{2}}{3}]$ (۲) $(\frac{2 - \sqrt{2}}{3}, 1]$ (۱)

پاسخ تشریحی:

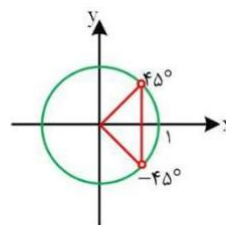
ابتدا حدود زاویه $2x - 15^\circ$ را با فرض داده شده مشخص می‌کنیم:

$$-15^\circ < x < 30^\circ \Rightarrow -30^\circ - 15^\circ < 2x - 15^\circ < 60^\circ - 15^\circ$$

پس $-45^\circ < 2x - 15^\circ < 45^\circ$ ، اگر به دایره مثلثاتی توجه کنیم وقتی $-45^\circ < 2x - 15^\circ < 45^\circ$ قرار می‌گیرد:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(2x - 15^\circ) \leq 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{2 - 2m}{3} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2} < 2 - 2m \leq 3 \Rightarrow 0 \leq m < \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$



به این ترتیب:

۶۳- در کدام تابع دوره تناوب آن برابر ۴ است و اختلاف مقادیر min و max آن برابر ۶ واحد است؟

$$f(x) = 2 + 4 \sin \frac{\pi}{4} x \quad (2)$$

$$f(x) = 4 - 2 \cos \frac{\pi}{4} x \quad (1)$$

$$f(x) = 3 + 5 \sin \frac{\pi}{4} x \quad (4)$$

$$f(x) = 5 - 3 \cos \frac{\pi}{4} x \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ - ساده)

پایه: تشریحی

اولاً: با توجه به آن که دوره تناوب تابع $T = 4$ است. پس:

$$\begin{aligned} y &= \sin ax \\ y &= \cos ax \end{aligned} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2}$$

پس باید $\sin \frac{\pi}{4} x$ یا $\cos \frac{\pi}{4} x$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \max &= a + |b| \\ \min &= a - |b| \end{aligned} \Rightarrow \max - \min = 2|b|$$

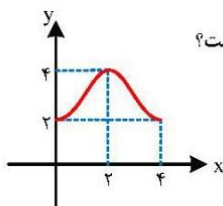
ثانیاً: اگر $f(x) = a + b \sin \frac{\pi}{4} x$ یا $f(x) = a + b \cos \frac{\pi}{4} x$ ، آن گاه:

پس $|b| = 3$ ، با توجه به گزینه‌های داده شده می‌توانیم: $f(x) = 5 - 3 \cos \frac{\pi}{4} x$ را انتخاب کنیم:

$$\begin{aligned} \max &= 8 \\ \min &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \max - \min = 6$$

$T = 4$

گروه آموزشی ماز



64- بخشی از نمودار $f(x) = a - b \cos^2 \frac{\pi}{4} x$ در یک دوره تناوب آن به صورت مقابل است. مقدار $f(ab)$ چه عددی است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۴ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ - متوسط)

نکته:

$$f(x) = \cos^2 ax \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

پایه: تشریحی

با توجه به آن که تابع در یک دوره تناوب آن رسم شده است. پس: $T = 4$:

$$T = \frac{\pi}{|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{f(\frac{\pi}{4}) > 0} a = \frac{\pi}{4}$$

به همین جهت:

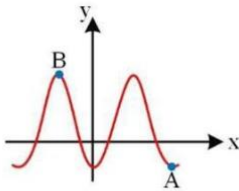
$$f(\cdot) = a - b \cos^2(\cdot) = a - b = 2 \Rightarrow 4 - b = 2 \Rightarrow b = 2$$

از طرفی $f(\cdot) = 2$ ، پس:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} x \\ ab &= 8 \end{aligned} \Rightarrow f(ab) = f(8) = 4 - 2 = 2$$

گروه آموزشی ماز

65- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - b \cos \frac{\pi x}{a}$ شکل مقابل است. اگر $A(4, -1)$ ، شیب پاره خط AB کدام است؟



- (1) $-\frac{3}{2}$
(2) -2
(3) $-\frac{5}{2}$
(4) -1

(ریاضی ۳ - صفحه ۳۲ و ۳۵ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

$$\frac{2\pi}{\pi} = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

با توجه به آن که $x_A = 4$ ، پس فاصله نقطه A با محور عرضها برابر ۴ خواهد شد. پس $T = 4$:

از طرفی $y_A = -1$ ، پس $f(0) = -1$ ، لذا: (توجه شود که چون نمودار تابع در شروع از صفر به صورت صعودی حرکت می کند بنابراین ضریب b باید مثبت باشد و طبق رابطه زیر، این حرکت زمانی رخ می دهد که $a > 0$ باشد)

$$f(0) = 2 - b \cos 0 = -1 \Rightarrow 2 - b = -1 \Rightarrow b = 3$$

نقطه B به اندازه $\frac{T}{4}$ از محور عرضها به چپ حرکت کرده و B در نقطه max تابع قرار گرفته به همین خاطر: $B(-2, 5)$

$$f(x) = 2 - 3 \cos \frac{\pi}{2} x \Rightarrow \begin{matrix} A(4, -1) \\ B(-2, 5) \end{matrix}$$

پس:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - (-1)}{-2 - (4)} = \frac{6}{-6} = -1$$

گروه آموزشی ماز

66- اگر $\sin x \cos x > 0$ و $\sin x - \cos x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار می گیرد؟



(ریاضی ۲ - صفحه ۷۷ - ساده)

پاسخ: گزینه ۲

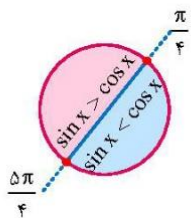
پاسخ تشریحی:

با توجه $\sin x \cos x > 0$ ، می توان فهمید که $\sin x$ و $\cos x$ هم علامت هستند یعنی $(\sin x < 0, \cos x < 0)$ یا $(\sin x > 0, \cos x > 0)$ که این نشان دهنده این است که انتهای کمان x در ناحیه اول یا سوم مثلثاتی است. ببینید:



$$\sin x - \cos x < 0 \Rightarrow \sin x < \cos x$$

از طرفی:



بنابراین ناحیه مورد نظر برابر است با اشتراک نواحی آبی رنگ، یعنی:

گروه آموزشی ماز

67- با فرض $\sin x = \frac{2}{3}$ ، اگر $|\cos x| > \cos x$ باشد، حاصل $\frac{\cos(5\pi - x) - \sin(x - \frac{11\pi}{2})}{\sin(7\pi + x) + \cos(x + \frac{9\pi}{2})}$ کدام است؟

(۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(۳) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۱) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(ریاضی ۲ - صفحات ۷۹ تا ۸۷ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پایه نهم

ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(x - \frac{11\pi}{2}) = \sin(x - \frac{3\pi}{2}) = -\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -(-\cos x) = \cos x$$

$$\sin(7\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(x + \frac{9\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

حال عبارت داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\cos(5\pi - x) - \sin(x - \frac{11\pi}{2})}{\sin(7\pi + x) + \cos(x + \frac{9\pi}{2})} = \frac{-\cos x - \cos x}{-\sin x - \sin x} = \frac{-2\cos x}{-2\sin x} = \cot x$$

از طرفی می‌دانیم $\sin x = \frac{2}{3}$ است. حال به کمک رابطه $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ داریم:

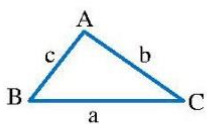
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{(\frac{2}{3})^2} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{9}{4} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cot x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

با توجه به فرض $|\cos x| > \cos x$ ، می‌توان فهمید که $\cos x < 0$ است و چون $\sin x = \frac{2}{3}$ بوده و مثبت است پس انتهای کمان x در ناحیه دوم مثلثاتی

است و می‌دانیم که در ناحیه دوم مثلثاتی، $\cot x < 0$ است، لذا $\cot x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ قابل قبول است.

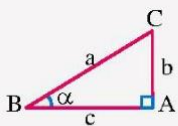
گروه آموزشی ماز

68- در مثلث $\triangle ABC$ ارتفاع AH برابر ۶ و مساحت مثلث برابر ۳۰ می‌باشد. حاصل $b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$ کدام است؟



- (۱)
(۲)
(۳)
(۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحات ۲۹ و ۳۵ - ساده)



$$\sin \alpha = \frac{b}{a} \quad \cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{c} \quad \cot \alpha = \frac{c}{b}$$

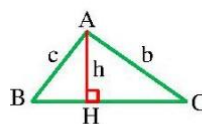
نکته:

پاسخ تشریحی:

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \triangle ABH: \cos \hat{B} &= \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = c \cos \hat{B} \\ \triangle ACH: \cos \hat{C} &= \frac{CH}{AC} \rightarrow CH = b \cos \hat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = BH + CH = BC$$

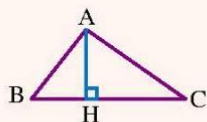
$$S = \frac{AH \times BC}{2} \Rightarrow 30 = \frac{6 \times BC}{2} \Rightarrow BC = 10$$



می‌دانیم:

سوالات منتخب:

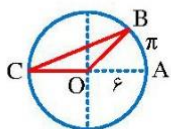
در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$ ، اندازه ارتفاع AH کدام است؟ (خارج ۹۹)



- (۱) ۴۸
(۲) ۵۶
(۳) ۶۴ ✓
(۴) ۷۲

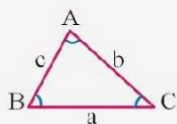
گروه آموزشی ماز

69- در دایره مقابل، شعاع برابر ۶ و طول کمان AB برابر π است. مساحت مثلث $\triangle BOC$ کدام است؟



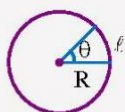
- (۱)
(۲)
(۳)
(۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ - صفحات ۷۲ و ۷۶ - متوسط)



$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

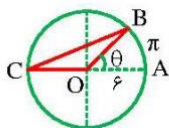
نکات طلایی:



$$l = R\theta \quad (\theta \text{ برحسب رادیان است.})$$

(۲)

می‌دانیم طول کمان AB روبرو به زاویه θ برابر $r\theta$ می‌باشد.



$$r\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{r}$$

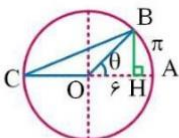
بنابراین در مثلث BOC زاویه \hat{O} برابر $\frac{\pi}{6}$ می‌باشد.

خواهیم داشت:

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin \hat{O} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin \frac{\pi}{6} = 18 \times \frac{1}{2} = 9$$

روش دوم:

زاویه θ برابر $\frac{\pi}{6}$ است.



$$BH = OB \times \sin \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{BH \times OC}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

سوالات منتخب:

دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟ (کتاب درسی)

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (1) \quad \checkmark$$

گروه آموزشی ماز

70- حاصل $\sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ - صفحات ۴۲ و ۴۳ - دشوار)

نکته مهم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

می‌دانیم: $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} = \frac{6\pi}{4}$ است.

$$\sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{6} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{14} - \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{14} - \frac{1}{2}$$

$$= \cos^2 \frac{\pi}{14} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2 \cos^2 \frac{\pi}{14} - 1) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{7}$$

سوالات منتخب:

حاصل عبارت $\sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ کدام است؟

$$\frac{3}{16} \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{8} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$(1)$$

گروه آموزشی ماز

71- مجموع جواب‌های معادله $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = 4 - \cot \frac{\alpha}{2}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{4\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ - صفحات ۴۳ تا ۴۸ - متوسط)

نکات مهم:

$$1) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2} \quad \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2} \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$2) \sin(x) = \sin(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cot \frac{\alpha}{2} = 4 \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 4 \Rightarrow \frac{2}{\sin \alpha} = 4 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} \\ \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$$

گروه آموزشی ماز

72- جواب‌های کلی معادله $\sin(x + \frac{\pi}{12}) + \cos(x - \frac{5\pi}{12}) = 1$ به کدام صورت است؟

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ - صفحات ۴۳ تا ۴۸ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ می‌باشد.

$$\sin(x + \frac{\pi}{12}) + \cos(x - \frac{5\pi}{12}) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{12}) + \cos(\frac{5\pi}{12} - x) = 1$$

با فرض $x + \frac{\pi}{12} = \alpha$ خواهیم داشت:

$$\sin \alpha + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 1 \Rightarrow \sin \alpha + \sin \alpha = 1 \Rightarrow 2 \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{12} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{12} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

سوالات منتخب:

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ برابر کدام است؟ (خارج ۹۵ ریاضی)

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{7\pi}{4}$ (۴) $\frac{9\pi}{4}$

گروه آموزشی ماز

73- کدام یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر از سایرین بزرگ‌تر است؟ (زوایا برحسب واحد رادیان هستند.)

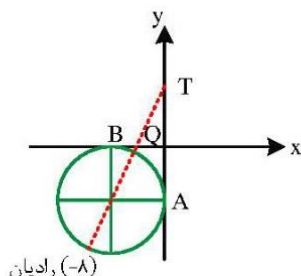
- (۱) $\sin(-\lambda)$ (۲) $\cos(-\lambda)$ (۳) $\tan(-\lambda)$ (۴) $\cot(-\lambda)$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ - صفحه ۷۶ و ۷۷ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا زاویه $(-\lambda)$ رادیان را به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$-\lambda \text{ rad} = -\lambda \times \frac{180}{\pi} \approx -\frac{458}{4} \text{ درجه}$$



بنابراین زاویه $(-\lambda)$ رادیان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی قرار دارد و بنابراین $\sin(-\lambda)$ و $\cos(-\lambda)$ مقادیری منفی هستند ولی $\tan(-\lambda)$ و $\cot(-\lambda)$ مقادیری مثبت هستند و طبق شکل $\tan(-\lambda) > \cot(-\lambda)$ زیرا $AT > BQ$.
بنابراین از بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\lambda)$ رادیان، $\tan(-\lambda)$ از سایر نسبت‌های مثلثاتی بزرگ‌تر است.

سؤالات منتخب:

مقدار کدام یک از اعداد زیر از سایرین بزرگ‌تر است؟ (زاویه‌ها برحسب رادیان هستند.)

- (۱) $\tan 2$ (۲) $\tan 3$ (۳) $\tan 5$ (۴) $\tan 6$

گروه آموزشی ماز

74- در شکل مقابل، طول ضلع BC چقدر است؟

- (۱) $6(\sqrt{3}+1)$ (۲) $6(\sqrt{3}-1)$ (۳) $6(2+\sqrt{3})$ (۴) $6(2-\sqrt{3})$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ - صفحه ۳۱ و ۳۲ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

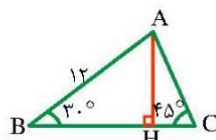
ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{12} \Rightarrow AH = 6$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{12} \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

$$\triangle AHC: \tan 45^\circ = \frac{AH}{HC} \Rightarrow 1 = \frac{HC}{6} \Rightarrow HC = 6$$

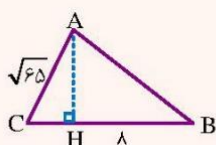
$$\Rightarrow BC = BH + HC = 6\sqrt{3} + 6 = 6(\sqrt{3} + 1)$$



سؤالات منتخب:

در شکل مقابل، $HB = 8$ و $\tan \hat{B} = \frac{3}{4}$ است. طول کدام CH است؟

- (۱) $\sqrt{29}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{35}$ (۴) $2\sqrt{6}$



گروه آموزشی ماز

75- اگر $4 \sin x = 7 \cos x$ باشد، مقدار $\sin x \cos x$ کدام است؟

(۴) $\frac{7}{13}$

(۳) $\frac{32}{65}$

(۲) $\frac{5}{13}$

(۱) $\frac{28}{65}$

(ریاضی ۱ - صفحه ۴۲ تا ۴۶ - ساده)

پاسخ: گزینه ۱



$$4 \sin x = 7 \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{7}{4} \Rightarrow \tan x = \frac{7}{4}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^2 x = \tan x \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{1 + \frac{49}{16}} = \frac{7}{4} \times \frac{16}{65} = \frac{28}{65}$$

توجه شود که در حل سوال بالا، از رابطهٔ مثلثاتی $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده شده است.

سوالات منتخب:

اگر $x \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$ باشد، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

(۴) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{5}{2}$ ✓

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{3}{2}$

گروه آموزشی ماز

76- اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ و $\sin \alpha = \frac{-12}{13}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $2 \sin(\frac{77\pi}{2} + \alpha) + 3 \cos(\frac{39\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) $-\frac{9}{13}$

(۲) -۲

(۱) $\frac{46}{13}$

(ریاضی ۲ - صفحه ۸۷ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۱



$$\sin \alpha = \frac{-12}{13} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه چهارم}} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

حال عبارت داده شده توسط مسئله را ساده می‌کنیم:

$$2 \sin(\frac{77\pi}{2} + \alpha) + 3 \cos(\frac{39\pi}{2} - \alpha) = 2 \sin(38\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) + 3 \cos(19\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = 2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha$$

$$= 2(\frac{5}{13}) - 3(\frac{-12}{13}) = \frac{46}{13}$$

سوالات منتخب:

حاصل عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{2}{5}$

(۲) -۱ ✓

(۱) ۱

گروه آموزشی ماز

77- اگر بپذیریم $\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin 16^\circ$ چه عددی است؟

- (۱) $-\frac{3}{25}$ (۲) $-\frac{4}{25}$ (۳) $-\frac{3}{26}$ (۴) $-\frac{3}{28}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۳ - ساده)

پاسخ تشریحی:

می دانیم: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$

$$\sin 37^\circ = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 74^\circ = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\cos 74^\circ = \sin 16^\circ \Rightarrow \sin 16^\circ = \frac{7}{25}$$

گروه آموزشی ماز

78- هرگاه دوره تناوب $f(x) = \cos 2ax$ برابر 2π باشد، جمع جوابهای $f(x) - f(2x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) 3π (۲) $3/5\pi$ (۳) 4π (۴) $4/5\pi$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ و ۴۸ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

دوره تناوب تابع $y = \cos 2ax$ برابر $\frac{2\pi}{|2a|}$ یعنی $\frac{\pi}{|a|}$ است.

با توجه به آن که:

$$\frac{\pi}{|a|} = 2\pi \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x \Rightarrow f(x) - f(2x) = \cos x - \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos x - (2\cos^2 x - 1) = 1 \Rightarrow \cos x - 2\cos^2 x + 1 = 1$$

$$\cos x = 2\cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{جمع جوابها} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 4\pi$$

گروه آموزشی ماز

79- اگر α زاویه ای حاده باشد و $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ، مقدار $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ چه عددی است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۳ - ساده)

پاسخ تشریحی:

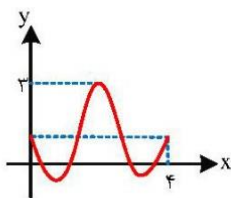
$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

چون $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ پس $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ پس $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ ، لذا:

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

گروه آموزشی ماز

80- شکل مقابل، بخشی از نمودار تابع $y = a + b \sin \frac{\pi}{3a} x$ است. b کدام است؟



- (۱) -۳
(۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $-\frac{8}{3}$
(۴) $-\frac{22}{9}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ - صفحه ۳۵ و ۴۰ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$f(\cdot) = a \Rightarrow a > 0$$

تابع در $x = 0^+$ نزولی است، پس $ab < 0$.

چون $a > 0$ و $ab < 0$ ، پس $b < 0$ ، لذا: $\max = a - b = 3$

از طرفی:

$$1/5T = 4 \Rightarrow \frac{3}{2}T = 4 \Rightarrow T = \frac{8}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3a} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8/3} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \xrightarrow{a-b=3} b = -\frac{22}{9}$$

گروه آموزشی ماز

81- دوره تناوب تابع $f(x) = 2a - 4 \cos^2 \frac{a\pi x}{3}$ نصف بیشترین مقدار تابع است. مقدار مثبت a کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ - صفحه ۳۲ تا ۳۷ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

در تابع $y = a + b \cos^2 cx$ داریم:

$$b > 0 \cdot \begin{cases} \max = a + b \\ \min = a \\ T = \frac{\pi}{|c|} \end{cases}$$

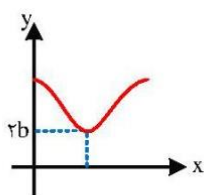
$$b < 0 \cdot \begin{cases} \max = a \\ \min = a + b \\ T = \frac{\pi}{|c|} \end{cases}$$

در این تابع $y = 2a - 4 \cos^2 \frac{a\pi x}{3}$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \max &= 2a \\ T &= \frac{\pi}{\left| \frac{a\pi}{3} \right|} = \frac{3}{|a|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{|a|} = \frac{1}{2} \times 2a \rightarrow a^2 = 3 \rightarrow a = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{a>0} a = \sqrt{3}$$

گروه آموزشی ماز

82- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \cos 2a\pi x$ به صورت مقابل است. مقدار کدام است؟



- (1)
(2)
(3) $\frac{1}{3}$
(4)

(ریاضی ۳ - صفحه ۴۰ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پایه تشریحی:

با توجه به نمودار:

$$\begin{cases} 2b > 0 \Rightarrow b > 0 \\ \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow a > 0 \end{cases}$$

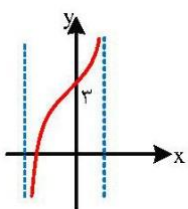
$$\min = a - b = 2b \Rightarrow a = 3b$$

$$\frac{T}{2} = \frac{a}{\lambda} \Rightarrow T = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{|2a\pi|} = \frac{a}{2} \xrightarrow{a>0} a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 3b \Rightarrow b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$a + b = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

گروه آموزشی ماز

83- قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \tan(ax + \frac{\pi}{4})$ به صورت شکل روبه رو است. کدام عدد در دامنه تعریف تابع نمی باشد؟



- (1) $\frac{5\pi}{3}$
(2) $\frac{5\pi}{4}$
(3) $\frac{5\pi}{8}$
(4) $\frac{5\pi}{6}$

(ریاضی ۳ - صفحه ۳۷ تا ۳۹ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پایه تشریحی:

$$f(0) = 1 + a \Rightarrow 1 + a = 3 \Rightarrow a = 2 \rightarrow f(x) = 1 + 2 \tan(2x + \frac{\pi}{4})$$

برای یافتن دامنه تعریف تابع، داریم:

$$2x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$k = 1 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$$

یعنی $x = \frac{5\pi}{8}$ در دامنه تعریف تابع نیست.

84- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan x = \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چه عددی است؟

- (۱) ۵ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۸ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\tan x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ 2 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

نکته:

اگر $\cos^2 x = \cos^2 \alpha$ ، آن‌گاه $x = k\pi \pm \alpha$

$$x = k\pi, 0 \leq x < 2\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

پس ۷ جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

گروه آموزشی ماز

85- اگر اندازه زاویه θ را سه برابر کنیم مقدار کسینوس آن تغییر نمی‌کند. جمع جواب‌های بدست آمده برای θ در بازه $[0, 2\pi]$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ - صفحه ۴۸ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

θ را سه برابر کنیم، آن‌گاه:

$$\cos 3\theta = \cos \theta \Rightarrow \begin{cases} 3\theta = 2k\pi + \theta \Rightarrow \theta = k\pi \\ 3\theta = 2k\pi - \theta \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

جمع جواب‌ها $= 5\pi$

گروه آموزشی ماز

86- یک هواگرد جت یک مسیر نیم‌دایره‌ای به شعاع یک کیلومتر را در ۴ ثانیه پیموده است. سرعت این جت چند متر بر ثانیه است؟ ($\pi \approx 3$)

- (۱) ۷۰۰ (۲) ۷۵۰ (۳) ۸۰۰ (۴) ۸۵۰

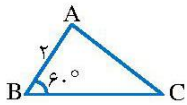
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ - صفحه ۷۴ - ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} r = 1000 \text{ m} \\ \alpha = \pi \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AB} = r\alpha = 1000 \times \pi = 3141.59 \text{ m}, \quad V = \frac{d}{t} = \frac{3141.59}{4} = 785.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گروه آموزشی ماز

87- مساحت مثلث مقابل برابر $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{2}$ است. طول ضلع متوسط مثلث کدام است؟



- (1) $\sqrt{6}+1$ (2)
(3) $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ (4)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ - صفحات ۲۹ تا ۳۴ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

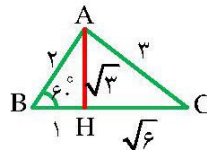
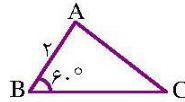
$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{18}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times BC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{6})}{2} \Rightarrow BC = 1+\sqrt{6}$$

$$BH = 2 \cos 60^\circ = 1 \Rightarrow HC = 1+\sqrt{6}-1 = \sqrt{6}$$

$$AH = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{3+6} = 3$$



ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

گروه آموزشی ماز

88- نقاط $M(1, \alpha)$ و مبدا مختصات و $P(\frac{1}{3}, \beta)$ روی یک راستا قرار دارند. اگر نقطه انتهایی کمان θ روی دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\alpha\beta$ کدام است؟

- (1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$ (3) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ (4) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحات ۳۶ تا ۴۰ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

طبق تعریف دایره مثلثاتی، β برابر با $\sin \theta$ و α برابر $\tan \theta$ و $\frac{1}{3} = \cos \theta$ خواهد بود و:

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 9 \Rightarrow \tan \theta = \pm \sqrt{8}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\alpha\beta = (\pm \sqrt{8})(\pm \frac{\sqrt{8}}{3}) = \frac{8}{3}$$

گروه آموزشی ماز

89- عبارت $\cos \frac{2\pi}{10} \sin \frac{14\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} \sin \frac{127\pi}{10}$ با کدام گزینه برابر است؟

- (1) $2 \sin^2 \frac{\pi}{5}$ (2) $-2 \sin^2 \frac{\pi}{5}$ (3) (4) -1

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ - صفحات ۷۹ تا ۸۶ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$(\cos \frac{\Delta\pi - 2\pi}{10} \times \sin \frac{14\pi - \pi}{5}) + (\cos(\pi + \frac{\pi}{5}) \times \sin \frac{14\pi - 3\pi}{10})$$

$$= \cos(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}) \times \sin(3\pi - \frac{\pi}{5}) + (-\cos \frac{\pi}{5} \times \sin(14\pi - \frac{3\pi}{10})) = (\sin \frac{\pi}{5} \times \sin \frac{\pi}{5}) + (-\cos \frac{\pi}{5})(-\cos \frac{\pi}{5}) = \sin^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1$$

$$(\sin(14\pi - \frac{3\pi}{10}) = -\sin \frac{3\pi}{10} = -\cos \frac{\pi}{5} \text{ متهم هستند. } \frac{\pi}{5} \text{ و } \frac{3\pi}{10})$$

گروه آموزشی ماز

90- با فرض $\sin 40^\circ = 0.6$ ، مقدار $\cos 80^\circ$ کدام خواهد بود؟

(۴) ۰.۳۰

(۳) ۰.۱۲

(۲) ۰.۲۸

(۱) ۰.۳۲

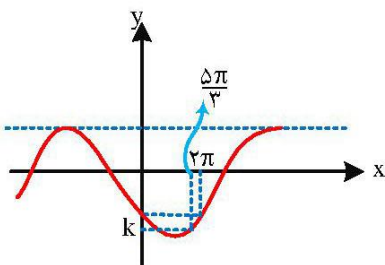
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ - صفحات ۴۲ و ۴۳ - ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 80^\circ = 1 - 2\sin^2 40^\circ = 1 - 2(0.6)^2 = 1 - 2(0.36) = 1 - 0.72 = 0.28$$

توجه کنید که چون مقدار $\sin 40^\circ$ با تقریب فرض شده است، مقدار $\cos 80^\circ$ نیز با تقریب به دست می‌آید.

گروه آموزشی ماز



91- نمودار مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -\frac{3}{4}\sin(ax) + b$ است. مقدار k کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{4}$

(۲) $-\frac{7}{4}$

(۳) $-\frac{3}{2}$

(۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ - صفحات ۳۲ تا ۳۶ - متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\max = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$T = 2 \times 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = 4\pi \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{2}$$

توجه کنید که نمودار تابع در همسایگی $x=0$ نزولی است، پس a باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}$$

$$k = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\frac{3}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

گروه آموزشی ماز

92- بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

(۴) $\frac{5}{4}$

(۳)

(۲)

(۱)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ - صفحات ۴۲ تا ۴۵ - متوسط)

نکته:

بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$ همواره برابر یک است.

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 x) = \frac{3}{4}\cos^2 x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \max = \left|\frac{3}{4}\right| + \frac{1}{4} = 1$$

گروه آموزشی ماز

93- معادله $2\cos^2 x + 3\sin x = \frac{5}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

(۴) ۵

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

(ریاضی ۳ - صفحات ۴۳ تا ۴۸ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

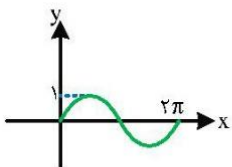


پاسخ تشریحی:

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = \frac{5}{2} \Rightarrow -4\sin^2 x + 3\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

$$8\sin^2 x - 6\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{16} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{4} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نمودار تابع $y = \sin x$ را در نظر بگیرید. هر یک از خطوط $y = \frac{1}{4}$ و $y = \frac{1}{2}$ دو بار نمودار تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ قطع می‌کند. پس معادله در این بازه ۴ ریشه دارد.



گروه آموزشی ماز

94- اگر $\frac{2\pi}{3}$ یک ریشه معادله $a\cos^2 \frac{x}{3} - \tan^2 x = 1$ باشد، معادله چند ریشه دیگر در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

(ریاضی ۳ - صفحات ۴۳ تا ۴۸ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

$$x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-\sqrt{3})^2 = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} = 4 \Rightarrow a = 16$$

$$\Rightarrow 16\cos^2 \frac{x}{3} - \tan^2 x = 1 \Rightarrow 16\cos^2 \frac{x}{3} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow 16\cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\xrightarrow{x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}} 16\cos^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{طرفین را در } \sin^2 \frac{x}{3} \text{ ضرب می‌کنیم}} 16\cos^2 \frac{x}{3} \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 x = \sin^2 \frac{x}{3} \Rightarrow 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin^2 \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{x}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{x}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

پس پاسخ گزینه ۲ است.

گروه آموزشی ماز

95- اگر انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی و $\tan 2\alpha = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

(۴) $-\frac{4}{\sqrt{10}}$

(۳) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$

(۲) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$

(۱) $-\frac{5}{\sqrt{10}}$

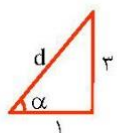
(ریاضی ۳ - صفحات ۴۲ و ۴۳ - ساده)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{-3}{4} \Rightarrow 2 \tan^2 \alpha - 8 \tan \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 3 \\ \tan \alpha = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

غ ق



$$\Rightarrow d = \sqrt{10} \xrightarrow{\text{در ربع ۳}} \sin \alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

گروه آموزشی ماز

96- خط $(m+1)y = \sqrt{2m-1}x + 3$ با خط $y = \sqrt{3}x - 1$ زاویه 30° درجه می‌سازد. خط $y = (m-3)x + 1$ با جهت مثبت محور x ها، چه زاویه‌ای

می‌سازد؟ ($m \neq -1$)

(۴) 120°

(۳) 135°

(۲) 150°

(۱) 45°

(ریاضی ۱ - صفحات ۴۰ و ۴۱ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

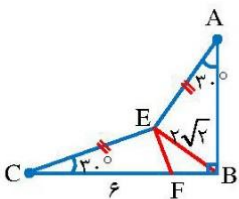
خط $y = \sqrt{3}x - 1$ با جهت مثبت محور x ها زاویه 60° درجه می‌سازد. ($\tan 60^\circ = \sqrt{3}$)

پس خط غیر قائم مورد نظر با محور x ها، زاویه 30° درجه می‌سازد. ($60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$)

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2m-1}}{m+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{2m-1}{m^2+2m+1} = \frac{1}{3} \xrightarrow{m \neq -1} m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$m - 3 = -1 \Rightarrow \tan \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

گروه آموزشی ماز



97- در شکل مقابل، مساحت مثلث $\triangle CEF$ ، کدام است؟ $(EB=2\sqrt{2}, CF=6)$

- (۱) $8\sqrt{2}$
(۲) $6\sqrt{2}$
(۳)
(۴)

پاسخ: گزینه ۴



پایه نهم ریاضی

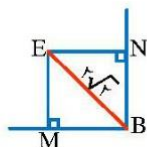
روش اول:

اگر از نقطه E، دو عمود بر اضلاع AB و BC خارج کنیم، مستطیل EMBN یک مربع خواهد بود.

$$EN = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \quad (1)$$

$$\triangle EN: \sin 30^\circ = \frac{EN}{AE} \xrightarrow{(1)} AE = 4 \Rightarrow CE = 4$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \times CF \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$$



روش دوم:

$$EN = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

$$S = \frac{1}{2} \times h \times CF = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

گروه آموزشی ماز

98- کوتاه ترین فاصله بین ریشه های معادله $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x - 1}$ کدام است؟

(۴) معادله ریشه ندارد

(۳) $\frac{\pi}{4}$

(۲) π

(۱) $\frac{\pi}{2}$

(ریاضی ۳ - صفحات ۴۳ تا ۴۸ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۴



پایه نهم ریاضی

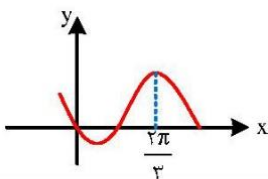
$$\sin x \neq 1$$

$$\cos x \neq 1 \quad (1)$$

$$\sin^2 x (\sin x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos x) \Rightarrow \sin^3 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^3 x \Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \xrightarrow{(1)} \begin{matrix} \sin^2 x \leq 1 \\ \cos^2 x \leq 1 \end{matrix} \text{ معادله ریشه ندارد}$$

گروه آموزشی ماز



99- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 2 \sin(bx + \frac{\pi}{6})$ ، شکل روبه‌رو است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

(ریاضی ۳ - صفحات ۳۲ تا ۳۸ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

$$f(\cdot) = 0 \Rightarrow a - 2 \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\max = a + 2 \Rightarrow \max = 3$$

$$f(\frac{2\pi}{3}) = 3 \Rightarrow 1 - 2 \sin(\frac{2\pi}{3}b + \frac{\pi}{6}) = 3$$

$$\sin(\frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow \frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi b}{3} = \frac{8\pi}{6} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + b = 3$$

اولاً:

ثانیاً:

گروه آموزشی ماز

100- جمع جواب‌های معادله مثلثاتی $2 \cos^2 2x - \sin 4x = 2$ ، در بازه $[0, 2\pi]$ چه عددی است؟

$$\frac{19\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{31\pi}{2} \quad (3)$$

$$\frac{27\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{25\pi}{2} \quad (1)$$

(ریاضی ۳ - صفحات ۴۳ تا ۴۷ - دشوار)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \cos^2 2x - 2 = \sin 4x \Rightarrow -2(1 - \cos^2 2x) = \sin 4x \Rightarrow -2 \sin^2 2x = \sin 4x$$

با توجه به آن که $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$ ، داریم:

$$-2 \sin^2 2x = 2 \sin 2x \cos 2x \begin{cases} \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rightarrow S_1 = \Delta\pi \\ \cos 2x = -\sin 2x \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \rightarrow S_2 = \frac{36\pi}{4} \end{cases}$$

$$S = S_1 + S_2 = \Delta\pi + \frac{9\pi}{2} = \frac{19\pi}{2}$$

گروه آموزشی ماز

101- مقدار $2 \cos(\frac{2\Delta\pi}{\lambda})$ کدام است؟

(۴) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$

(۲) $-\sqrt{1}+\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{1}+\sqrt{2}$

(ریاضی ۳ - صفحات ۴۲ و ۴۳ - ساده)

پاسخ: گزینه ۴

پایه ششم تشریحی

$$2 \cos(\frac{2\Delta\pi}{\lambda}) = 2 \cos(2\pi + \frac{\pi}{\lambda}) = -2 \cos \frac{\pi}{\lambda}$$

ابتدا توجه کنید که:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{\lambda} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} - 1$$

از طرف دیگر:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+2}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}+2}{2} \xrightarrow{\cos > 0} \cos \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cos(\frac{2\Delta\pi}{\lambda}) = -2 \cos \frac{\pi}{\lambda} = -\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

102- تابع $f(x) = 2 \tan(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{x}{2}) + 1$ روی بازه $(-\frac{2\pi}{\lambda}, m)$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار m کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{\Delta\pi}{2}$

(۲) $\frac{\Delta\pi}{4}$

(۱) $\frac{13\pi}{4}$

(ریاضی ۳ - صفحات ۳۷ تا ۳۹ - متوسط)

پاسخ: گزینه ۲

پایه ششم تشریحی

$$f(x) = 2 \tan(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{x}{2}) + 1 = -2 \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{\lambda}) + 1$$

ابتدا توجه کنید که:

روی هر بازه‌ای که تابع $y = \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{\lambda})$ اکیداً صعودی باشد، تابع f روی آن بازه اکیداً نزولی خواهد بود.

پس کافی است دامنه تابع $y = \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{\lambda})$ را معین کنیم.

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{\lambda} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} \neq 2k\pi + \pi \Rightarrow x \neq 2k\pi + \frac{\Delta\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین، تابع موردنظر در نقاط $x = 2k\pi + \frac{\Delta\pi}{2}$ تعریف نمی‌شود. ($k \in \mathbb{Z}$) پس روی بازه‌هایی که شامل این نقاط نباشند، اکیداً صعودی است.

k	-۱	۰	۱
x	$-\frac{2\pi}{\lambda}$	$\frac{\Delta\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{4}$

با توجه به جدول بالا، تابع f روی بازه $(-\frac{2\pi}{\lambda}, \frac{\Delta\pi}{2})$ تعریف شده و اکیداً نزولی است.

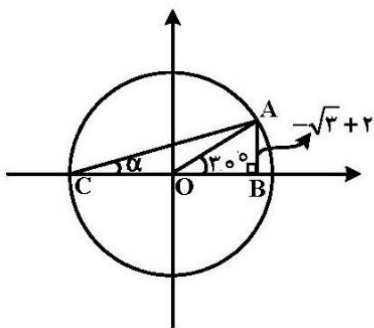
گروه آموزشی ماز



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

۱. گزینه ۲ درست است.

ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف وتر است.



$$OC = OA = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = -2\sqrt{3} + 4$$

$$OB = OA \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-2\sqrt{3} + 4) = \sqrt{3}(-\sqrt{3} + 2)$$

$$BC = -2\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3}(-\sqrt{3} + 2) = (\sqrt{3} + 2)(-\sqrt{3} + 2) = -3 + 4 = 1$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3} + 2)^2} = \sqrt{1 + 7 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

۲. گزینه ۱ درست است.

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 - 2$$

با توجه به رابطه‌های $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ و $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$ و با تغییر متغیر

$\cos x - \sin x = t$ ، حاصل‌های $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$ و $\tan^2 x + \cot^2 x = \left(\frac{2}{1-t^2}\right)^2 - 2$ بدست می‌آید، سپس

معادله را حل می‌کنیم.

$$t - \frac{1-t^2}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 + \sqrt{3} & \text{ق ق} \\ t = -1 - \sqrt{3} & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{1 - (3 + 1 - 2\sqrt{3})} = \frac{2}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{2(2\sqrt{3} + 3)}{12 - 9} = \frac{2}{3}(2\sqrt{3} + 3)$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = \frac{4}{9}(2\sqrt{3} + 3)^2 - 2 = \frac{4}{9}(12 + 9 + 12\sqrt{3}) - 2 = \frac{2}{3}(11 + 8\sqrt{3})$$

۳. گزینه ۲ درست است.

اگر α و β متمم هم باشند، $\cot \alpha = \cot \beta$ و از طرفی همواره داریم:

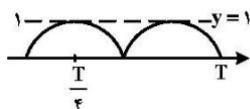
$$\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha, \quad \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

زوج کمان‌های $(\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14})$ ، $(\frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14})$ و $(\frac{5\pi}{14}, \frac{7\pi}{14})$ متمم یکدیگرند، پس داریم:

$$A = \sin^2 \frac{\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{14} + \sin^2 \frac{5\pi}{14}, \quad B = \cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{5\pi}{14}$$

پس $A + B = 3$ یا $3 - A = B$ است.

۴. گزینه ۴ درست است.



$$y = \left| \cos\left(\frac{9\pi}{4} - ax\right) \right| = \left| \sin(ax) \right|$$

می‌بایست π به اندازه $3T + \frac{T}{4}$ باشد، تا خط $y = 1$ را در ۷ نقطه قطع کند چون $T = \frac{2\pi}{a}$ ($a > 0$) پس داریم:

$$\frac{6\pi}{a} + \frac{\pi}{2a} = \pi \Rightarrow \frac{13\pi}{2a} = \pi \Rightarrow a = \frac{13}{2} = 6.5$$

۵. گزینه ۳ درست است.

الزاماً هریک از حاصل ضربها برابر ۱ است. $\cos(A - B) = \cos(B - C) = \cos(C - A) = 1$ یا $A - B = B - C = 0$ در نتیجه مثلث متساوی الاضلاع است.

۶. گزینه ۱ درست است.

$$\tan 60^\circ \cos(180^\circ + 30^\circ) - \cot(-45^\circ) \sin(180^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

۷. گزینه ۱ درست است.

$$2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) = 5 \Rightarrow 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = 5$$

پس $\sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = 1$ در نتیجه فقط $x - \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$ یک جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

۸. گزینه ۴ درست است.

با توجه به تساوی $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}$ خواهیم داشت.

$$\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha$$

۹. گزینه ۲ درست است.

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x}{1 + \cos x} = 0 \Rightarrow \sin 4x = \sin(-3x), \cos x \neq -1$$

$$4x = 2k\pi + (-3x) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7}$$

۱۰. گزینه ۴ درست است.

از آنجایی که $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ است:

$$\frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱. گزینه ۳ درست است.

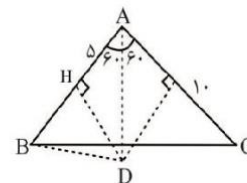
$$\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱۲. گزینه ۲ درست است.

$$\triangle ADH: \cos 60^\circ = \frac{DH}{AD} \Rightarrow AD = 10$$

$$\Rightarrow \triangle ABD: AD = AB = 10 \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = 25\sqrt{3} \approx 43$$

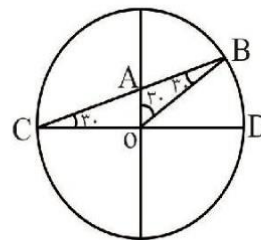


۱۳. گزینه ۲ درست است.

$$\triangle OBC: OB = OC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

$$\triangle AOC: AO = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle OAB: \hat{O} = \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow AB = AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



۱۴. گزینه ۱ درست است.

$$A = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)} = \frac{\cos^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sin^2 x$$

$$B = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$B + 1 = \frac{1}{1 - A} \Rightarrow 1 - A + B - AB = 1 \Rightarrow B - A - AB = 1$$

۱۵ گزینه ۲ درست است.

اگر هر دو جمله با فاصله مساوی از راست و چپ را با هم در نظر بگیریم، با توجه به اینکه به ازاء هر دو زاویه متمم α و β ، $\tan \alpha = \cot \beta$ است، داریم:

$$\frac{1}{1 + \tan 15} + \frac{1}{1 + \tan 75} = \frac{1}{1 + \tan 15} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan 15}} = \frac{1 + \tan 15}{1 + \tan 15} = 1$$

و از طرفی $\frac{1}{1 + \tan 45} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$ پس $45 - 15 = 30$ ، زوج کسر دارای مجموع یک و یک کسر دارای حاصل $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

$$30 \times 1 + \frac{1}{2} = \frac{61}{2} = 30.5$$

۱۶ گزینه ۴ درست است.

$$y = -\sin^2 x - \sin x + 1 = -(\sin x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$$

$$-\frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{8} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 < \sin x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4} + \frac{5}{4} \leq y < 0 + \frac{5}{4} = -1 \leq y < \frac{5}{4} \Rightarrow R = [-1, \frac{5}{4})$$

۱۷ گزینه ۳ درست است.

$$\tan \frac{11\pi}{10} = \tan \frac{\pi}{10} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{10} = \frac{3}{5}, \cos \frac{\pi}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sin^4 \frac{7\pi}{5} = \cos^4 \frac{\pi}{10} = \frac{256}{625}, \cos^2 \frac{7\pi}{5} = \frac{9}{25}, \cos \frac{9\pi}{10} = -\cos \frac{\pi}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(-\frac{11\pi}{10}) = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{256 + 4 \times 125}{25(9 + 15)} = \frac{756}{600} = 1.26$$

۱۸ گزینه ۴ درست است.

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\hookrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1), \quad x = k\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$\Rightarrow (1) \cup (2) \cup (3) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

۱۹ گزینه ۳ درست است.

ماکزیمم تابع $|a| + c$ و مینیمم تابع $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد و داریم:

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} -a + c = 6 \\ a + c = -10 \end{cases} \Rightarrow c = -2, a = -8$$

$$b > 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{b} = 6\pi \rightarrow b = \frac{1}{3}$$

بنابراین تابع به صورت $f(x) = -8 \sin\left(\frac{x}{3}\right) - 2$ ظاهر می شود و $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6$ می باشد.

۲۰. گزینه ۴ درست است.

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

↓ دو طرف به توان ۲

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{3}{4}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{3}{4} \quad \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2(2x) = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۲۱ گزینه ۳ درست است.

با جاگذاری $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ خواهیم داشت:

$$(2 \cos^2 x - 1) - \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

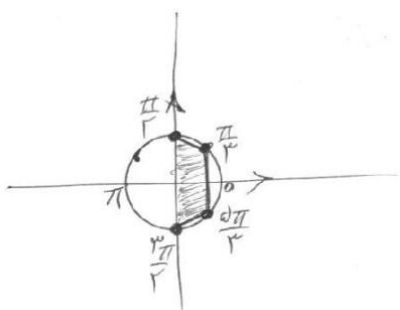
$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

جوابهای بین 0 و 2π عبارتند از:

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$



۲۲ گزینه ۱ درست است.

$$y = a + b \sin(cx)$$

$$x = 0, y = 2 \Rightarrow 2 = a + b \sin(0) \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{\lambda} \rightarrow T = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|c|} \rightarrow |c| = 4$$

$$|b| + a = 5 \xrightarrow{a=2} |b| = 3$$

چون نمودار \sin نسبت به محور x ها قرینه شده است، پس علامت b و c حتماً قرینه یکدیگر است. بنابراین ضابطه تابع یکی از دو حالت زیر است:

الف) $f(x) = 2 - 3 \sin(4x)$

ب) $f(x) = 2 + 3 \sin(-4x)$

با خروج منفی از \sin ، در واقع هر دو به یک معادله به صورت $f(x) = 2 - 3 \sin(4x)$ تبدیل می شود. پس:

$$a - b + c = 2 + 3 + 4 = 9$$

۲۳ گزینه ۴ درست است.

در این معادله از مرز $\frac{\pi}{2}$ دایره مثلثاتی برای تغییر نسبت کمک می گیریم:

$$\cos 7x = \sin 3x$$

$$\cos 7x = \cos \left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - 3x}_{\text{معلوم}} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} 7x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \\ 10x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \boxed{x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{20}} &\rightarrow \frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}, \frac{21\pi}{20}, \frac{25\pi}{20}, \frac{29\pi}{20}, \frac{33\pi}{20}, \frac{37\pi}{20} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{جوابهای خاص:} \\ \text{جوابهای خاص:} \end{array}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۱۴ جواب است.

۲۴. گزینه ۲ درست است.

$$\frac{\sin(\cancel{\pi} + \frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\cancel{2 \times 360^\circ} + \pi - \alpha)}{\cos(\cancel{360^\circ} + \frac{\pi}{2} + \alpha) - (-\sin(\cancel{\pi} + \frac{3\pi}{2} - \alpha))}$$

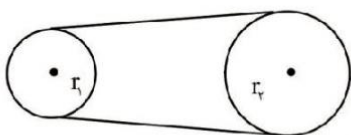
دوره‌های دایره صرف نظر می‌شوند:

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} \\ &= \frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{-2 \cos \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha} \\ &= \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج بر } \sin \alpha \text{ تقسیم شود}} \frac{2 \cot \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{2(\frac{1}{\gamma})}{1 + \frac{1}{\gamma}} = \frac{\frac{2}{\gamma}}{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma + 1} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

صورت و مخرج بر $\sin \alpha$ تقسیم شود

۲۵. گزینه ۱ درست است.

چون طول کمان طی شده هر دو دایره برابر است، پس داریم:



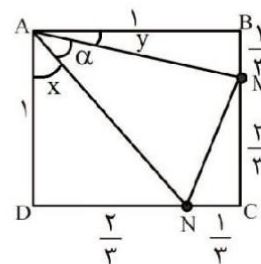
$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \Rightarrow r_1 \times \frac{1}{16} = 6 \times \frac{\gamma}{8} \Rightarrow r_1 = 91$$

۲۶. گزینه ۳ درست است.

$$AM = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}, AN = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{3} \times \frac{\sqrt{13}}{3} \times \sin \alpha, S_{AMN} = 1 - (\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}) = \frac{18 - 11}{18} = \frac{7}{18}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\gamma \sqrt{130}}{130} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{9 \sqrt{130}}{130} \Rightarrow \tan x = \frac{\gamma}{9}$$



۲۷. گزینه ۳ درست است.

$$\tan \alpha = 2/4 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{12}{13}, \cos \alpha = -\frac{5}{13}$$

$$A = \frac{\cot \alpha \times \sin \alpha}{\sin \alpha - \tan \alpha} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13} - 2/4} = \frac{5}{43/2} = \frac{25}{216}$$

۲۸. گزینه ۳ درست است.

$$\sin 2x = 1 - \lambda \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\Rightarrow 2\lambda = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$2x - \frac{\pi}{24} = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{5\pi}{48}$$

۲۹. گزینه ۴ درست است.

$$t = \sin x + \cos x \Rightarrow \frac{t^2 - 1}{2} = \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \frac{11}{16}$$

$$\Rightarrow 4t^3 - 24t + 11 = 0 \Rightarrow (2t - 1)(4t^2 + 2t - 11) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

۳۰. گزینه ۱ درست است.

$$2y = \frac{\pi}{2} - 4x \Rightarrow \tan 2x + \cot 4x = \frac{2 \sin 2x \sin 2x + \cos 4x}{\sin 4x} = \frac{2 \sin^2 2x + 1 - 2 \sin^2 2x}{\sin 4x} = \frac{1}{\cos 2y}$$

۳۱. گزینه ۱ درست است.

$$x \in (0, 2\pi) \Rightarrow \frac{x}{4} \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \tan \frac{x}{4} > 0$$

$$\Rightarrow 1 + \tan \frac{x}{4} > 1 \Rightarrow \sin \frac{x}{4} > 1 \quad \text{هیچ ریشه‌ای ندارد.}$$

۳۲. گزینه ۲ درست است.

$$\tan \frac{x}{2} - (1 - \cos x) = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{x}{2}} - 2 \sin \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\sin \frac{x}{2} \times (1 - \sin x)}{\cos \frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi \end{cases}$$

۳۳. گزینه ۴ درست است.

با توجه به این که $\tan \theta = \frac{1}{2}$ است، با فرض $AD = a$ داریم:

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{AC} \Rightarrow AC = 2a \\ \tan \theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2a}{AB} \Rightarrow AB = 4a \end{cases} \Rightarrow BD = 2a \Rightarrow \frac{BD}{AD} = 2$$

۳۴. گزینه ۳ درست است.

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ و حاصل جمع آنها $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2m}{4} = \frac{m}{2} \\ \sin \alpha \times \cos \alpha = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{m^2}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{m^2}{4} \Rightarrow \frac{m^2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm \sqrt{2}$$

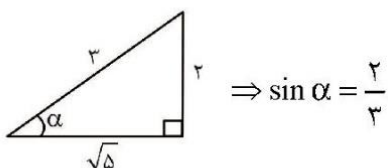
از آنجایی که $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ است، پس حاصل $\sin \alpha + \cos \alpha$ منفی بوده و $m = -\sqrt{2}$ قابل قبول است.

۳۵. گزینه ۱ درست است.

$$\sin(15\pi + \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \tan(-\alpha) \tan\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$-\sin \alpha - \sin \alpha + \tan \alpha \times \cot \alpha = 1 - 2 \sin \alpha = 1 - 2 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

توجه کنید اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ باشد، $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ می‌شود:



۳۶ گزینه ۳ درست است.

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و داریم:

$$y = a \cos x + b \Rightarrow \begin{cases} a \cos \frac{2\pi}{3} + b = -1 \Rightarrow b = -1 \\ -a + b = -4 \xrightarrow{b=-1} a = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

۳۷ گزینه ۴ درست است.

با توجه به شکل، $x = y + \frac{\pi}{3}$ است، پس:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right) = -\sin y \Rightarrow \sin y + \cos x = 0$$

۳۸ گزینه ۴ درست است.

با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|\pi} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = 1 \\ a \cos \frac{\pi}{3} + c = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} + c = 2 \\ -a + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a + b + c = 2 + 1 + 1 = 4$$

توجه کنید چون بعد از محور y ها ابتدا مینیمم داریم پس $b = 1$ بوده و $b = -1$ غیرقابل قبول است.

۳۹. گزینه ۴ درست است.

$$\sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} = 3 - 3 \cos x \Rightarrow \sin^2 x = 3 \cos x - 3 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x = 3 \cos x - 3 \cos^2 x \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [0, 4\pi)} x = 0, 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جوابها در بازه $[0, 4\pi)$ برابر 10π می‌باشد.

۴۰ گزینه ۳ درست است.

در دوزنقه ABCD ، $AD = \sin \alpha$ ، $BC = \tan \alpha$ و $CD = 1 - \cos \alpha$ است. پس:

$$S = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \tan \alpha) \times (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \tan \alpha - \tan \alpha \cos \alpha)$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(\tan \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) = \frac{1}{2} \sin \alpha \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

۴۱ گزینه ۲ درست است.

$$2 \cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

اما به ازای $x = \pi$ ، مخرج کسر برابر صفر می شود پس غیر قابل قبول است. بنابراین معادله دارای ۳ جواب در بازه $[0, \pi]$ است.

۴۲ گزینه ۴ درست است.

بیشترین مقدار $b - a$ برابر دوره تناوب تابع $f(x)$ است، پس:

$$\frac{\pi}{\pi|m|} = 4 \Rightarrow |m| = \frac{1}{4}$$

چون تابع $f(x)$ در بازه (a, b) اکیداً صعودی است، پس $m = -\frac{1}{4}$ می باشد. حال داریم:

$$f\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 2 \tan\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{6\pi}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 2 \tan\left(\frac{17\pi}{3}\right) = 2 \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \times (-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$$

۴۳ گزینه ۲ درست است.

$$\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 1 \Rightarrow \cos \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha \cos \alpha)^2 \xrightarrow{\sin \alpha \cos \alpha = t} 1 - 2t = t^2 \Rightarrow$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه اول}} t = \frac{-2 + \sqrt{4}}{2} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \sqrt{2} - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$$

۴۴ . گزینه ۳ درست است.

$$2 \sin^2 x (\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(2 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{9\pi}{2}$$

۴۵. گزینه ۴ درست است.

دوره تناوب تابع ۴ است، پس:

$$4 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

کمترین مقدار تابع ۱- می باشد، بنابراین داریم:

$$2 + a = -1 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

حال در تابع $f(x) = 2 - 3 \sin(\frac{\pi x}{2})$ مقدار $f(\frac{43}{3})$ را به دست می آوریم:

$$f(\frac{43}{3}) = 2 - 3 \sin(\frac{43\pi}{6}) = 2 - 3 \sin(7\pi + \frac{\pi}{6}) = 2 - 3 \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = 2 - 3(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$$

۴۶. گزینه ۴ درست است.

$$\sin \theta = \frac{-5}{13} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \theta = \frac{12}{13}$$

انتهای کمان در ربع چهارم

$$\tan \theta = \frac{-5}{12} = -\frac{5}{12}, \cot \theta = -\frac{12}{5}$$

$$-5 \cot \theta + 12 \tan \theta - \cos \theta + \cos \theta = -5(-\frac{12}{5}) + 12(-\frac{5}{12}) = 12 - 5 = 7$$

۴۷. گزینه ۲ درست است.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - (\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x \cos x)^2} - \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 4 - 2\sqrt{2} = 2(2 - \sqrt{2})$$

۴۸. گزینه ۳ درست است.

$$-\cos \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cos \alpha (\cos \alpha) + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

۴۹. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{2 \sin(2 \times 36^\circ + 18^\circ - 15^\circ) + \cos(2 \times 36^\circ + 9^\circ + 15^\circ)}{2 \sin(2 \times 36^\circ + 9^\circ - 15^\circ) - \cos(2 \times 36^\circ + 15^\circ)} \cdot \frac{\sin(18^\circ + 75^\circ)}{\cos(36^\circ + 75^\circ)}$$

$$= \frac{2 \sin 15^\circ - \sin 15^\circ}{2 \cos 15^\circ - \cos 15^\circ} \cdot \frac{-\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = -\tan 15^\circ \cdot \tan 75^\circ = -\tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ = -1$$

۵۰. گزینه ۲ درست است.

$$\frac{\cos^2 x + 5 \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\cos^2 x + 5 \cos x + 3(1 - \cos^2 x) = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 5 \cos x + 3 = 0$$

$$\cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-4} = \begin{cases} 3 & \text{غ ق ق} \\ -\frac{1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

۵۱. گزینه ۴ درست است.

$$\max: |x| + c = 3 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\min: -|a| + c = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$y = \cos \frac{x}{2} + 2 \quad a + b + c = 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

۵۲. گزینه ۴ درست است.

$$\sin(\pi \cos^4 x) = 1 \rightarrow \pi \cos^4 x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos^4 x = 2K + \frac{1}{2}, K \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{فقط } K=0 \text{ درست است}} \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 4} x = \frac{K\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$$

$$\textcircled{1} 0 \leq \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \leq 2\pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} 0 \leq K + \frac{1}{4} \leq 4 \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} K = 0, 1, 2, 3$$

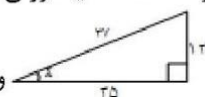
$$\textcircled{2} 0 \leq \frac{K\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \leq 2\pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} 0 \leq K - \frac{1}{4} \leq 4 \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} K = 1, 2, 3, 4$$

این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ مجموعاً به تعداد ۸ جواب متمایز دارد.

۵۳. گزینه ۲ درست است.

اعداد ۱۲ و ۳۵ و ۳۷ اعداد فیثاغورثی اند، بنابراین ساده‌ترین روش برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی x در نظر گرفتن

مثلث قائم‌الزاویه و توجه به این نکته است که در ناحیه چهارم مثلثاتی فقط \cos مثبت و سه نسبت



$$\cot x = \frac{-35}{12}, \tan x = \frac{-12}{35}, \sin x = -\frac{12}{37}, \cos x = \frac{35}{37}$$

$$36 \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 35 \cot\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) - 74 \cos(-(\pi - x)) - 111 \cos\left(-\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$= -36 \cot x + 35 \tan x + 74 \cos x - 111 \sin x$$

$$= -36\left(\frac{-35}{12}\right) + 35\left(\frac{-12}{35}\right) + 74\left(\frac{35}{37}\right) - 111\left(\frac{-12}{37}\right)$$

$$= 105 - 12 + 70 + 36 = 199$$

۵۴. گزینه ۳ درست است.

با توجه به شکل، دوره تناوب π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ از طرفی مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب ۴ و -۲ است:

$$\begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \rightarrow c = 1, |a| = 3$$

(البته با در نظر گرفتن $f(0) = 1$ با توجه به نمودار مقدار $c = 1$ مستقیماً هم به دست می آید.) با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی آنها باید مثبت باشند:

$$f(x) = 3 \sin(2x) + 1$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \sin(2x) = \frac{-1}{3} \rightarrow \cos 4x = 1 - 2 \sin^2(2x)$$

$$\cos 4x = 1 - 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} \rightarrow \cos 4x = 2 \cos^2(2x) - 1$$

$$\cos 4x = 2\left(\frac{7}{9}\right)^2 - 1$$

$$\boxed{\cos 4x = \frac{17}{81}}$$

۵۵. گزینه ۱ درست است.

$$y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_{\max} = a + |b| = \frac{5}{2} \xrightarrow{b < 0 \text{ با توجه به شکل}} a - b = \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0 \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a = \frac{5}{6}, b = \frac{-5}{3}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{5}{6} - \frac{5}{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sqrt{3}f(\pi) = \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 5 = \frac{5(4 + \sqrt{3})}{3}$$

۵۶ گزینه ۲ درست است.

$$\tan^2 x + \frac{2}{\cos^2 x} = 3 \xrightarrow{\text{به دو طرف ۱ اضافه شود}} \underbrace{1 + \tan^2 x}_{\frac{1}{\cos^2 x}} + \frac{2}{\cos^2 x} = 3 + 1$$

$$\frac{3}{\cos^2 x} = 4 \rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{3}{4}} \rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \boxed{\tan^2 x = \frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{\cot^2 x = 3} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\sin^2 x = \frac{1}{4}}$$

$$\cot^2 x + \frac{2}{\sin^2 x} + \tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 4 + (\sqrt{3})^2 = 14$$
 عبارت مورد نظر

۵۷ گزینه ۳ درست است.

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \rightarrow \tan \alpha = m_{\text{شیب خط}} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{2}{5}}$$

شیب

$$\frac{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 5 \sin \alpha} \xrightarrow{\div \cos \alpha \text{ و مخرج}} \frac{2 \tan \alpha + 4}{3 - 5 \tan \alpha} = \frac{2(\frac{2}{5}) + 4}{3 - 5(\frac{2}{5})} = \frac{4}{8}$$

۵۸ گزینه ۴ درست است.

ماکزیمم این تابع ۵ است. بنابراین $a \sin bx + 2 \leq 5$ یعنی $a = 3$. دوره تناوب $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}$ است، در نتیجه:

$$\boxed{b=3} \leftarrow \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{با توجه به شکل } a \text{ و } b \text{ هم علامت هستند}).$$

$$f(x) = 3 \sin(3x) + 2 \rightarrow f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{7}{2}$$

۵۹ گزینه ۳ درست است.

واضح است که:

$$\cos \alpha = \frac{2}{2m-1}$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5-m}$$

α, β هر دو در ربع اول دایره مثلثاتی و \cos آن‌ها مثبت است، یعنی عددی بین صفر و یک، پس داریم:

$$\begin{cases} 0 < \frac{2}{2m-1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2m-1 \Rightarrow \frac{1}{2} < m \\ 2 < 2m-1 \Rightarrow \frac{3}{2} < m \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2} < m \quad (1) \\ 0 < \frac{3}{5-m} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 5-m \Rightarrow m < 5 \\ 3 < 5-m \Rightarrow m < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m < 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} < m < 2 \quad \text{از اشتراک بین (۱) و (۲) داریم:}$$

اما! مسئله هنوز تمام نشده! دقت کنید با توجه به صورت تست، $\alpha < \beta$ است و لذا در ربع اول:

$$\cos \alpha > \cos \beta \Rightarrow \frac{2}{2m-1} > \frac{3}{5-m}$$

برای حل این نامساوی، طرفین را در عبارت‌های $(5-m)$ و $(2m-1)$ (که در قسمت قبل دیدیم، عبارت‌هایی همواره مثبت هستند) ضرب می‌کنیم:

$$2(5-m) > 3(2m-1) \Rightarrow 10-2m > 6m-3 \Rightarrow 13 > 8m \Rightarrow m < \frac{13}{8}$$

$$\text{از اشتراک این محدوده با } \frac{3}{2} < m < 2 \text{ داریم:}$$

$$\frac{3}{2} < m < \frac{13}{8}$$

۶۰. گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم:

$$\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi + 3\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(945^\circ) = \cos\left(\underbrace{720^\circ}_{2 \times 360^\circ} + 225^\circ\right) = \cos(225^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس فرض مسئله به این صورت می‌شود:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\alpha + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\cos\alpha = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{9}$$

$$= 1 - \sin 2\alpha = \frac{2}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{7}{9}$$

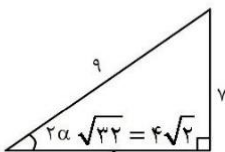
می‌دانیم شیب یک خط، \tan زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x می‌سازد که در اینجا می‌شود:

$$m = \tan 2\alpha$$

یعنی:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{7}{9} \\ \tan 2\alpha = ? \end{cases}$$

از طریق رسم یک مثلث قائم الزاویه فرضی عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow m = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

(دقت کنید که $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ و لذا $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ است، یعنی زاویه 2α در ربع اول دایره مثلثاتی و مقدار \tan آن مثبت است)

پس معادله خط مورد نظر به صورت $y = \frac{7}{4\sqrt{2}}x + h$ است که با جایگذاری نقطه $(\sqrt{2}, 0)$ در آن داریم:

$$0 = \frac{7}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}) + h \Rightarrow 0 = \frac{7}{4} + h \Rightarrow h = -\frac{7}{4}$$

۶۱. گزینه ۱ درست است.

$$AB=BC$$

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس:

طول BC، برابر فاصله بین دو قله و دره متوالی تابع است که برابر با نصف دوره تناوب است.

چون در تابع $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + b$ ، $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ می‌باشد، پس:

$$Bc = \frac{T}{2} = 3 \Rightarrow AB = 3$$

یعنی مقدار ماکزیمم این تابع برابر با ۳ بوده و به این ترتیب به سرعت نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(دقت کنید که شروع نمودار از روی محور yها صعودی بوده و لذا $a > 0$ است.)

$$a \times b = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

۶۲. گزینه ۱ درست است.

باقیمانده تقسیم عبارت موردنظر بر $x - \cos \alpha$ برابر با ۱ است، یعنی وقتی ریشه مقسوم علیه را پیدا کرده و در مقسوم قرار می‌دهیم، حاصل برابر با ۱ می‌شود:

$$x - \cos \alpha = 0 \Rightarrow x = \cos \alpha$$

$$2x^4 - x^2 - \sin^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha - 1) \xrightarrow{x = \cos \alpha} = 2 \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha - 2 \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$2(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1 \quad (*)$$

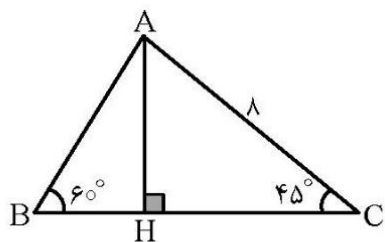
می‌دانیم:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

پس عبارت (*) به این صورت خواهد بود:

$$2 \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 2k\pi \Rightarrow \alpha = k\pi$$

۶۳. گزینه ۳ درست است.



$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{AC} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{4} \rightarrow \boxed{AH = 4\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{AH}{HC} \rightarrow 1 = \frac{4\sqrt{2}}{HC} \rightarrow \boxed{HC = 4\sqrt{2}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{HB} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{HB} \rightarrow \boxed{HB = \frac{4\sqrt{6}}{3}}$$

$$BC = HB + HC = \frac{4\sqrt{6}}{3} + 4\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} + 4\sqrt{2} \right) (4\sqrt{2})$$

$$S_{\Delta ABC} = 16 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

۶۴. گزینه ۱ درست است.

$x < 0 \Rightarrow A(x, -4x)$ روی خط $y = -4x$ و در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$x^2 + (-4x)^2 = 1 \xrightarrow{x < 0} x = \frac{-1}{\sqrt{17}}, y = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin \alpha = y = \frac{4}{\sqrt{17}}, \cos \alpha = x = \frac{-1}{\sqrt{17}} \quad (1)$$

$x > 0 \Rightarrow B(x, -4x)$ روی خط $y = -4x$ و در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.

$$\begin{cases} x = \cos \beta \\ y = \sin \beta \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$$

$$x^2 + (-4x)^2 = 1 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1}{\sqrt{17}}, y = \frac{-4}{\sqrt{17}}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-4}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = -4 \rightarrow \cot \beta = \frac{-1}{4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 4\sqrt{17} \left(\frac{4}{\sqrt{17}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{17}} \right) \right) \left(-4 + \left(\frac{-1}{4} \right) \right) = 4 \times 5 \times \left(\frac{-17}{4} \right) = -85$$

۶۵. گزینه ۱ درست است.

$$\cos \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$$

$$2 \cos(x - 2\pi) = 2 \cos(x - \pi - \pi) = 2 \cos(x - \pi) = 2 \cos(\pi - x) = -2 \cos x$$

$$\sin x + 2 \cos x = 0 \xrightarrow{+ \cos x} \tan x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{\tan x = -2}$$

$$\cot \left(\frac{11\pi}{2} + x \right) = \cot \left(4\pi + \frac{3\pi}{2} + x \right) = \cot \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = -\tan x = 2$$

۶۶. گزینه ۴ درست است.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \boxed{R = \frac{\pi}{4}}$$

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث $\pi \equiv 180^\circ$ است:

$$\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} = \pi \rightarrow \alpha = \frac{11\pi}{20} \text{ رادیان}$$

$$L = r \cdot \theta \rightarrow L = 100 \times \frac{11\pi}{20} = 55\pi \xrightarrow{\pi=3} L = 165$$

↓
بر حسب رادیان

۶۷. گزینه ۳ درست است.

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = K \sin \frac{7\pi}{6} - 1 = K \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

$$= K \left(-\sin \frac{\pi}{6}\right) - 1 = K \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{-11}{2} \Rightarrow \boxed{K = 9}$$

$$f(x) = 9 \sin x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x_A = \frac{\pi}{2} \\ x_C = \frac{3\pi}{2} \\ x_B = \frac{5\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 8 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ارتفاع مثلث } ABC = 18$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(2\pi) \times 18 = 18\pi$$

۶۸. گزینه ۳ درست است.

$$\circ = a \times \circ + c \rightarrow \boxed{c = \circ} \rightarrow y = a \sin(b\pi x)$$

از $x = \frac{-1}{2}$ تا مبدأ برابر $\frac{1}{4}$ دوره تناوب تابع است، بنابراین: $T = 2$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \rightarrow |b| = 1$$

ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{2}$ است؛ در نتیجه $|a| = \frac{1}{2}$ تابع در همسایگی مبدأ مختصات نزولی است، بنابراین $ab < 0$ است:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, b = -1 \rightarrow 6a - b + c = 4 \\ a = -\frac{1}{2}, b = 1 \rightarrow 6a - b + c = -4 \end{array} \right.$$

$$\text{مقدار ممکن} = 4(-4) = -16$$

۶۹ گزینه ۱ درست است.

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \xrightarrow{\div \cos \alpha} \tan \alpha = 2$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \end{array} \right. \rightarrow$$

ناحیه سوم

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

ناحیه سوم

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{1}{5}\right) - 1 = \frac{-3}{5}$$

$$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(\frac{-3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{25}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha + \cos 4\alpha = \frac{4}{5} - \frac{7}{25} = \frac{13}{25} = 0,52$$

۷۰ گزینه ۲ درست است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{17\pi}{\lambda} + x\right) = \cos\left(\frac{16\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right) = \frac{1}{4} \xrightarrow{\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha} \frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right)\right) = \frac{1}{4}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{24}} \xrightarrow{k=0} x_1 = \frac{-\pi}{24} \xrightarrow{k=1} x_2 = \frac{23\pi}{24}$$

$$2x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{5\pi}{24}} \xrightarrow{k=-1} x_3 = \frac{5\pi}{24} \xrightarrow{k=0} x_4 = -\pi + \frac{5\pi}{24}$$

$$\text{مجموع جوابهای متمایز} = \frac{\pi}{2}$$

$$D_f = [\circ, 4]$$

↓

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 4 \rightarrow x_{\max} = 2 \text{ و } y_{\max} = 4 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} 4 = a + b \cos(\pi) \rightarrow \boxed{a - b = 4} \quad (1)$$

$$\circ = a + b \cos(\circ) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} \circ = a + b \cos(\circ) \rightarrow \boxed{a + b = \circ} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow a = 2, b = -2 \Rightarrow f(x) = 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) + \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 3 + 3 = 6$$

نقطه A روی منحنی $f(x) = 2 \sin^2 x$ و نقطه B روی منحنی $g(x) = \cos^2 x$ است، پس وقتی طول پاره خط AB برابر دو واحد است، یعنی:

$$y_A - y_B = 2 \Rightarrow 2 \sin^2 x - \cos^2 x = 2$$

برای حل این معادله مثلثاتی از رابطه $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ استفاده کرده و داریم:

$$2 \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 2 \Rightarrow 3 \sin^2 x = 3 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به اینکه مطابق شکل، طول نقاط A و B درباره $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ قرار دارد، $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ قابل قبول است. پس:

$$\begin{cases} x_A = x_B = \frac{2\pi}{3} \\ y_A = 2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_B}{y_A} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{9}$$

۷۳. گزینه ۲ درست است.

روش اول:

عبارت‌های داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^4 x} &\xrightarrow{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^6 x} = \\ \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^6 x} &= \frac{1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^6 x} = \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} + 1 = \boxed{\tan^6 x + 1} \\ \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} &\xrightarrow{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x} = \\ \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} = \boxed{\tan^6 x} \end{aligned}$$

پس حاصل عبارت اول، یک واحد بیشتر از حاصل عبارت دوم است.

روش دوم:

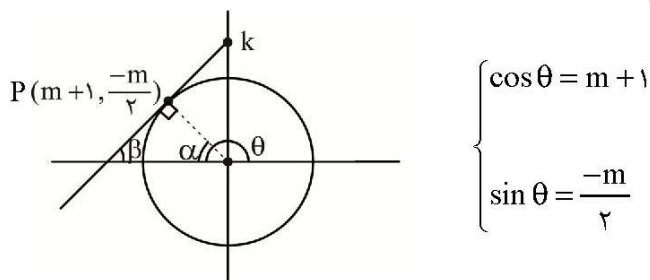
یک زاویه دلخواه مثلاً $x = \frac{\pi}{4}$ را در هر دو عبارت جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^4 x} &\xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^6} - \frac{3(1)}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^4} = \frac{1}{\frac{1}{8}} - \frac{3}{\frac{1}{2}} = 8 - 6 = \boxed{2} \\ * \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} &\xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \boxed{1} \end{aligned}$$

پس حاصل عبارت اول، یک واحد بیشتر از حاصل عبارت دوم است.

۷۴. گزینه ۳ درست است.

شکل زیر را ببینید. در ابتدا دقت کنید که برای نوشتن معادله خط مورد نظر، باید شیب آن که برابر با $\tan \beta$ است را به دست بیاوریم. با توجه به مختصات نقطه P، به راحتی داریم:



$$\begin{cases} \cos \theta = m + 1 \\ \sin \theta = \frac{-m}{2} \end{cases}$$

(دقت کنید که شعاع دایره بر خط مماس عمود است)

پس باید:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{-m}{4}\right)^2 + (m+1)^2 = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{4} + (m^2 + 2m + 1) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m\left(\frac{5}{4}m + 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 & \text{غ ق} \\ m = \frac{-8}{5} \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{3} \text{ و } P\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ به صورت } P \text{ نقطه}$$

$$\tan \alpha = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta = -\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\tan \beta = \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

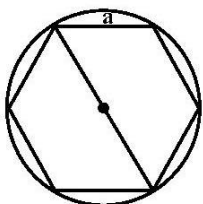
پس کافی است معادله خط گذرنده از نقطه $p\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ با شیب $m = \tan \beta = \frac{3}{4}$ را بنویسیم:

$$y = \frac{3}{4}x + h \xrightarrow[\text{را صدق می دهیم}]{\text{نقطه } \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)} \frac{4}{5} = \frac{3}{4}\left(\frac{-3}{5}\right) + h \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{-9}{20} + h \Rightarrow h = \frac{4}{5} + \frac{9}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

بنابراین معادله خط فوق به صورت $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ است و مقدار k همان عرض از مبدأ این خط یعنی $\frac{5}{4}$ است.

۷۵ گزینه ۱ درست است.

دقت کنید که وقتی ۶ ضلعی منتظم در داخل دایره‌ای محاط می‌شود، قطر بزرگ ۶ ضلعی منتظم برابر با قطر دایره است (شکل را ببینید)، پس در اینجا:

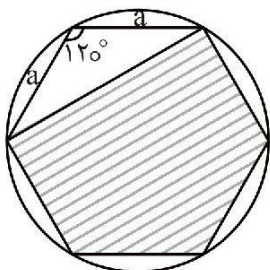


$$S = 4\pi \Rightarrow \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow \text{قطر دایره} = 4$$

$$\text{قطر بزرگ ۶ ضلعی منتظم} = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

حالا برای به دست آوردن مساحت ۵ ضلعی هاشورخورده، باید مساحت مثلث سفید که مثلثی متساوی الساقین به طول ساق‌های a و زاویه بین دو ساق 120° است، را از مساحت ۶ ضلعی منتظم کم کنیم:

$$S_{\text{۶ ضلعی}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) \xrightarrow{a=2} = 6\sqrt{3}$$



$$S_{\text{مثلث سفید}} = \frac{1}{2}(a)(a)(\sin 120^\circ) \xrightarrow{a=2} = \frac{1}{2}(2)(2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

۷۶ گزینه ۴ درست است.

در ابتدا دقت کنید که:

$$f(x) = a \sin \pi x \cos \pi x \cos 2\pi x + b = \frac{a}{4} \sin 4\pi x + b$$

چون در مثلث $\triangle ABC$ ، ارتفاع و میانه نظیر ضلع AC بر هم منطبق‌اند، پس این مثلث در رأس B ، متساوی‌الساقین بوده و $AB = BC$ پس:

$$BC = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{4\pi}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow AB = \frac{1}{4}$$

از اینجا به راحتی نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = 4$$



1 روی محیط دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱۸ سانتی‌متر، نقطه A انتهای کمان $\frac{\pi}{6}$ رادیان و نقطه B انتهای زاویه 23° درجه است. طول کمان کوتاه‌تر بین دو نقطه A و B تقریباً چند سانتی‌متر است؟

۷۵ (۴)

۵۷ (۳)

۶۳ (۲)

۵۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

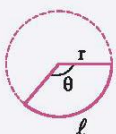
مشاوره تبدیل درجه به رادیان (و برعکس) و همچنین محاسبه طول کمان را بلد باشید. سؤال این مدلی تا الان در کنکور نداشته ایم.

خوبت حل کنی بهتره شکل بکشید تا کوتاه‌ترین طول کمان معلوم شود.

نکات

۱ برای تبدیل درجه به رادیان (یا برعکس) از تناسب زیر استفاده می‌کنیم که در آن D بر حسب درجه و R بر حسب رادیان است:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$



۲ طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی θ رادیان از رابطه $\ell = r\theta$ به دست می‌آید. (واحد r و ℓ یکسان است، مثلاً هر دو میلی‌متر یا هر دو سانتی‌متر هستند.)

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{23^\circ}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{23\pi}{18}$$

پاسخ تشریحی گام اول: زاویه 23° درجه را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

گام دوم: دو نقطه A (انتهای کمان $\frac{\pi}{6}$ رادیان) و B (انتهای کمان 23°) را روی دایره نشان می‌دهیم:

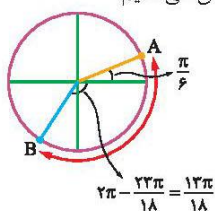
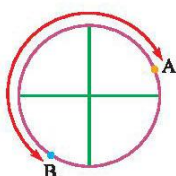
گام سوم: در شکل سمت راست، طول کمان AB کوتاه‌تر است. زاویه مرکزی در

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{23\pi}{18} = \frac{8\pi}{9}$$

این حالت برابر است با:

گام چهارم: طول کمان AB برابر است با:

$$\ell = r\theta \Rightarrow AB = 18 \times \frac{8\pi}{9} = 16\pi \approx 16 \times 3.14 \approx 50$$



تست و پاسخ 2

اگر $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \cot(\pi - x) = \frac{2}{3}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - x)}{2 \cos x - \sin(x - \pi)}$ کدام است؟

-۰/۲۵ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۰/۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال مربوط به کمان‌های $\alpha \pm \frac{k\pi}{4}$ جزء سؤالات پرتکرار در کنکور است. اگر خوب بلد نیستید، حتماً درس‌نامه را بخوانید.

خوبت حل کنی بهتره درس‌نامه تست را بخوان!

درس‌نامه •• (ساده‌کردن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $(\frac{k\pi}{4} \pm \alpha)$)

می‌خواهیم رابطه نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{\pi}{4} \pm \alpha$ ، $\frac{3\pi}{4} \pm \alpha$ ، $\pi \pm \alpha$ و $2\pi \pm \alpha$ را با نسبت‌های مثلثاتی زاویه α به دست آوریم. برای این کار مراحل زیر را می‌رویم:

۱) تغییر اسم می‌دهد یا نه: اگر زاویه α با کمان‌های π یا 2π جمع (یا تفریق) شده بود، تغییر اسمی در کار نیست؛ ولی اگر α با $\frac{\pi}{4}$ یا

$\frac{3\pi}{4}$ جمع (یا تفریق) شده بود، نسبت مثلثاتی تغییر اسم می‌دهد، یعنی \sin می‌شود \cos (و بالعکس) و \tan می‌شود \cot (و بالعکس).

(۲) علامت: با فرض حاده بودن α (مثلاً 1°)، ربعی که زاویه $\frac{\pi}{4} \pm \alpha$ یا $\pi \pm \alpha$... در آن قرار می‌گیرد را پیدا می‌کنیم و مشخص می‌کنیم علامت نسبت اولیه در آن ربع مثبت بوده یا منفی. چندتا مثال ببینید:

$$\left. \begin{array}{l} \text{چون } \frac{3\pi}{4} \text{ داریم، تغییر اسم داریم (sin می‌شه cos).} \\ \sin(\frac{3\pi}{4} + \alpha) \leftarrow -\cos \alpha \end{array} \right\} \leftarrow \sin(\frac{3\pi}{4} + \alpha)$$

$\frac{3\pi}{4} + \alpha$ در ربع ۴ می‌افتد. \sin منفی.

$$\left. \begin{array}{l} \text{چون } \pi \text{ داریم، تغییر اسم نداریم.} \\ \cos(\pi + \alpha) \leftarrow -\cos \alpha \end{array} \right\} \leftarrow \cos(\pi + \alpha)$$

$\pi + \alpha$ در ربع ۳ می‌افتد. \cos منفی.

پاسخ تشریحی گام اول: رابطه $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \cot(\pi - x) = \frac{2}{3}$ دو عبارت دارد، هر دو را ساده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{چون } \frac{\pi}{4} \text{ داریم، تغییر اسم داریم (cot می‌شه tan).} \\ \tan(\frac{\pi}{4} + x) \leftarrow -\cot x \end{array} \right\} \leftarrow \tan(\frac{\pi}{4} + x)$$

$\frac{\pi}{4} + x$ در ربع ۲ می‌افتد. \tan منفی.

$$\left. \begin{array}{l} \text{چون } \pi \text{ داریم، تغییر اسم نداریم.} \\ \cot(\pi - x) \leftarrow -\cot x \end{array} \right\} \leftarrow \cot(\pi - x)$$

$\pi - x$ در ربع ۲ می‌افتد. \cot منفی.

رابطه را ساده می‌کنیم: $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \cot(\pi - x) = \frac{2}{3} \Rightarrow -\cot x - \cot x = \frac{2}{3} \Rightarrow -2\cot x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{3}$

گام دوم: دو عبارت در کسر $\frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - x)}{2\cos x - \sin(x - \pi)}$ را باید ساده کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{چون } \frac{3\pi}{4} \text{ داریم، تغییر اسم داریم (sin می‌شه cos).} \\ \sin(\frac{3\pi}{4} - x) \leftarrow -\cos x \end{array} \right\} \leftarrow \sin(\frac{3\pi}{4} - x)$$

$\frac{3\pi}{4} - x$ در ربع ۳ می‌افتد. \sin منفی.

$$\left. \begin{array}{l} \text{چون } \pi \text{ داریم، تغییر اسم نداریم.} \\ \sin(x - \pi) \leftarrow -\sin(x - \pi) \leftarrow \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \end{array} \right\} \leftarrow -\sin(\pi - x) \leftarrow \sin(x - \pi)$$

$\pi - x$ در ربع ۲ می‌افتد. \sin مثبت.

$$\frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - x)}{2\cos x - \sin(x - \pi)} = \frac{-\cos x}{2\cos x + \sin x}$$

پس عبارت‌مان به شکل روبه‌رو در می‌آید:

گام سوم: چون $\cot x$ را داریم باید عبارات صورت و مخرج کسر بالا را بر $\sin x$ تقسیم کنیم تا $\cot x$ ساخته شود:

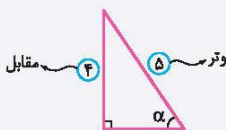
$$\frac{-\cos x}{2\cos x + \sin x} = \frac{\frac{-\cos x}{\sin x}}{\frac{2\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin x}} = \frac{-\cot x}{2\cot x + 1} = \frac{-(-\frac{1}{3})}{2(-\frac{1}{3}) + 1} = 1$$

تکنیک محاسبه نسبت‌های مثلثاتی به کمک مثلث قائم‌الزاویه:

فرض کنید یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه α و ربعی که α در آن است را داریم و یکی دیگر از نسبت‌ها را می‌خواهیم. می‌خواهیم بدون نیاز به اتحادها به آن برسیم. با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال: فرض کنید $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α در ربع دوم است و ما $\tan \alpha$ را می‌خواهیم. فعلاً با این که α در ربع دوم است کاری نداریم.

۱) با توجه به تعریف سینوس که می‌شد مقابل به وتر، مثلث قائم‌الزاویه‌ای مثل شکل روبه‌رو می‌کشیم:





۲ ضلع سوم را با فیثاغورس درمی آوریم.

۳ حالا تانژانت α را طبق تعریف می نویسیم و علامتش را با توجه به ربع دوم بودن می گذاریم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{ربع ۲ (tan < 0)}} \tan \alpha = \frac{-4}{3}$$

3 تست و پاسخ

اگر $10 \cot 105^\circ - \sqrt{24} \cos(-66^\circ) = a \tan 84^\circ + 18 \sin 60^\circ$ ، آن گاه مقدار a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره نسبت مثلثاتی زوایای هم خانواده با 30° ، 45° و 60° جزء سوالات نسبتاً پرتکرار در کنکور است. حتماً طریقهٔ به دست آوردن سریع آن‌ها را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره برای محاسبهٔ نسبت مثلثاتی زوایای بزرگ، حق دارید از آن‌ها مضارب صحیح 36° درجه را کم کنید!

نکات

۱ اگر دو زاویه مکمل باشند، سینوس هایشان برابر و سه نسبت دیگرشان قرینهٔ هم است.

۲ برای محاسبهٔ مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای بزرگ، مجاز هستیم مضارب 36° یا 2π را حذف کنیم.

۳ در مورد نسبت‌های زاویهٔ $-\alpha$ داریم:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

فقط \cos منفی می خوره!

پاسخ تشریحی همهٔ عبارتهای مثلثاتی داده شده را ساده می کنیم:

$$\tan 84^\circ = \tan(72^\circ + 12^\circ) = \tan 12^\circ \xrightarrow{\text{مکمل}} -\tan 6^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \sin(72^\circ - 12^\circ) = \sin(-12^\circ) \xrightarrow{\text{نکته ۳}} -\sin 12^\circ \xrightarrow{\text{مکمل}} -\sin 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 105^\circ = \cot(108^\circ - 3^\circ) = \cot(-3^\circ) = -\cot 3^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos(-66^\circ) = \cos(-72^\circ + 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}$$

$$a \tan 84^\circ + 18 \sin 60^\circ = 10 \cot 105^\circ - \sqrt{24} \cos(-66^\circ)$$

حالا مقادیر به دست آمده را در معادله قرار می دهیم:

$$\Rightarrow -a\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -10\sqrt{3} - \sqrt{12} \xrightarrow{\text{قرینه}} a\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 10\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \xrightarrow{\div \sqrt{3}} a + 9 = 10 + 2 \Rightarrow a = 3$$

تست و پاسخ 4

اگر $\sin(\frac{3\pi}{\lambda} + x) = k$ ، آن گاه حاصل $\cos(x - \frac{\pi}{\lambda})$ بر حسب k کدام است؟

(1) k (2) $-k$ (3) $\sqrt{1-k^2}$ (4) $-\sqrt{1-k^2}$

پاسخ: گزینه 1

مشاوره در نگاه اول ممکن است رابطه بین زاویه‌ها را نفهمید. بهتر است یک بار مجموع و تفاضلشان را حساب کنید، شاید این جوری رابطه بینشان را فهمیدید.

خوبت حل کنی بهتره اختلاف $x - \frac{\pi}{\lambda}$ و $\frac{3\pi}{\lambda} + x$ چه قدر است؟

نکات 1) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ 2) اگر دو زاویه متمم باشند، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و بالعکس.

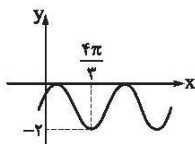
پاسخ تشریحی می‌دانیم $\sin(\frac{3\pi}{\lambda} + x) = k$ و دنبال $\cos(x - \frac{\pi}{\lambda})$ هستیم. طبق نکته (1) می‌توانیم جای $\cos(x - \frac{\pi}{\lambda})$ بنویسیم $\cos(\frac{\pi}{\lambda} - x)$.

مجموع دو زاویه $\frac{3\pi}{\lambda} + x$ و $\frac{\pi}{\lambda} - x$ می‌شود $\frac{\pi}{\lambda}$ ، یعنی متمم هستند؛ پس سینوس $(\frac{3\pi}{\lambda} + x)$ با کسینوس $(\frac{\pi}{\lambda} - x)$ برابر است:

$$\sin(\frac{3\pi}{\lambda} + x) = k \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{\lambda} - x) = k$$

تست و پاسخ 5

قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(x - \frac{\pi}{3})$ به صورت شکل داده شده است. حاصل $a - b$ کدام است؟



- (1) صفر (2) -3 (3) -2 (4) -4

پاسخ: گزینه 3

مشاوره سؤال نمودار سینوسی یا کسینوسی جزء سؤالات تقریباً ثابت کنکور است؛ البته معمولاً کمی سخت‌تر از این سؤال است!

خوبت حل کنی بهتره به حداکثر مقدار y و نقطه $(\frac{4\pi}{3}, -2)$ دقت کنید.

نکته در تابع به فرم $y = A \cos(Bx + D) + C$ ، بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع برابر است با:

$$\max = |A| + C$$

$$\min = -|A| + C$$

پاسخ تشریحی ضابطه تابع داده شده به صورت مقابل است:

$$y = \underbrace{b}_{A} \cos(x - \frac{\pi}{3}) + \underbrace{a}_{C}$$

طبق نمودار رسم شده، \max و \min به ترتیب 0 و -2 هستند؛ پس: $a = -1$ ، $|b| = 1$ $\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$

تابع از نقطه $(\frac{4\pi}{3}, -2)$ عبور کرده، پس:

$$y = b \cos(x - \frac{\pi}{3}) + a \xrightarrow[\substack{a=-1 \\ (\frac{4\pi}{3}, -2)}]{\text{حل دستگاه}} -2 = b \cos(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) - 1 \Rightarrow -2 = b(\cos \pi) - 1 \Rightarrow -2 = -b - 1 \Rightarrow b = 1$$

$$a - b = -1 - 1 = -2$$

پس:

تذکره اگر مثلثات سال دوازدهم را خوانده بودید، لازم نبود طراح نقطه $(\frac{4\pi}{3}, -2)$ را بدهد و می‌توانستید بدون این نقطه به کمک $|b|=1$ و نمودار تابع، مشخص کنید که $b=1$ درست است یا $b=-1$.

تست و پاسخ 6

نمودارهای دو تابع $f(x) = \cos x + |\cos x|$ و $g(x) = \sin x - |\sin x|$ در کدام یک از بازه‌های زیر بر هم منطبق‌اند؟

- (1) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ (2) $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4})$ (3) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ (4) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$

پاسخ: گزینه 4

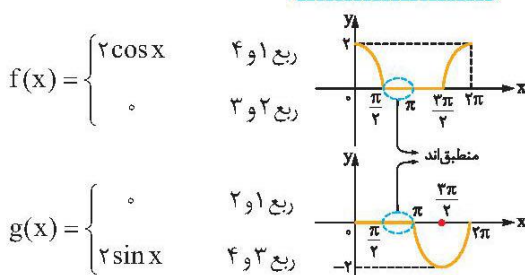
مشاوره در رسم نواحی قدر مطلق، با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، قدر مطلق را بردارید.

خودت حل کنی بهتره تابع f را به شکل $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$ بنویسید. g هم مثل همین و بعد نتیجه‌گیری کنید.

پاسخ تشریحی توابع f و g را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \cos x + |\cos x| = \begin{cases} 2\cos x & \cos x \geq 0 \\ 0 & \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x - |\sin x| = \begin{cases} 0 & \sin x \geq 0 \\ -2\sin x & \sin x \leq 0 \end{cases}$$



هر دو تابع در بخشی از دامنه‌شان ضابطه $y=0$ دارند. در محدوده مشترک این دامنه‌ها یعنی اشتراک $\cos x \leq 0$ و $\sin x \geq 0$ ، که ربع ۲ می‌شود، دو تابع بر هم منطبق‌اند. در بین گزینه‌ها، فقط بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ زیرمجموعه‌ای از ربع ۲ است. در انتها نمودارهای دو تابع را هم ببینید:

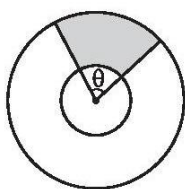
تست و پاسخ 7

در شکل داده‌شده شعاع دایره بزرگ ۴ برابر شعاع دایره کوچک هم‌مرکز با آن است. اگر محیط قسمت رنگی ۲ برابر محیط دایره کوچک‌تر باشد. زاویه θ تقریباً چند درجه است؟

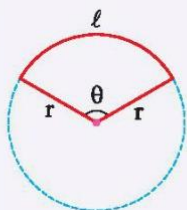
- (1) 60° (2) 70° (3) 75° (4) 65°

پاسخ: گزینه 3

خودت حل کنی بهتره محیط قسمت رنگی از دو تا طول کمان (که می‌شود $r\theta$) و دو پاره‌خط (که برابر با اختلاف شعاع‌هاست) تشکیل شده است.



نکات



۱ طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی θ رادیان از رابطه $l = r\theta$ به دست می‌آید.

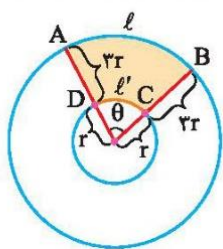
۲ در مورد قطاع با زاویه مرکزی θ رادیان و شعاع r داریم:

$$P_{\text{قطاع}} = r + r + l = 2r + r\theta \Rightarrow P_{\text{قطاع}} = (2 + \theta)r$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 \Rightarrow S_{\text{قطاع}} = \frac{\theta}{2} r^2$$

سهیم زاویه مرکزی از یک دور کامل

۳ یک رادیان تقریباً $57/3^\circ$ است.



پاسخ تشریحی شعاع دایره کوچک را r و شعاع دایره بزرگ را $2r$ می‌گیریم:

محیط قسمت رنگی را می‌نویسیم:

$$P_{\text{رنگی}} = \underbrace{DA}_{2r} + \underbrace{AB}_{l} + \underbrace{BC}_{2r} + \underbrace{CD}_{l'} = 2r + (2r)\theta + 2r + r\theta = 6r + 3r\theta = r(6 + 3\theta)$$

محیط دایره کوچک‌تر $2\pi r$ است. محیط قسمت رنگی، ۲ برابر محیط دایره کوچک‌تر است، پس:

$$\frac{P_{\text{رنگی}}}{P_{\text{دایره کوچک}}} = 2 \Rightarrow \frac{r(6 + 3\theta)}{2\pi r} = 2 \Rightarrow 6 + 3\theta = 4\pi \Rightarrow \theta = \frac{4\pi - 6}{3} = \frac{4 \times 3.14 - 6}{3} = \frac{6.56}{3} = 2.187$$

حالا باید $1/3$ رادیان را به درجه تبدیل کنیم:

$$1/3 \times 57/3 = 75^\circ$$

تست و پاسخ 8

طول دو ضلع از مثلثی ۴ و ۵ و کسینوس زاویه بین این دو ضلع برابر $5/6$ است. مساحت این مثلث کدام است؟

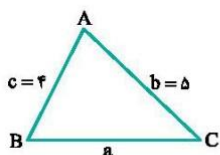
۴ (۴)

۳ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی گام اول: برای داده‌های سؤال، شکل می‌کشیم:

گام دوم: کسینوس A را داریم. سینوسش را هم به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \sin^2 A + (5/6)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 A = 11/36 \xrightarrow{0 < \hat{A} < 180^\circ} \sin A = 11/6$$

گام سوم: با داشتن دو ضلع و سینوس زاویه بینشان، مساحت را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} b.c. \sin \hat{A} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times 11/6 = 11$$

تست و پاسخ 9

اگر x زاویه‌ای حاده و رابطه $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$ برقرار باشد، آنگاه مقدار $\tan x$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره خیلی وقت‌ها اول حل باید تغییری در ظاهر مسئله بدھیم وگرنه سؤال جلو نمی‌رود! مثل همین سؤال.

خودت حل کنی بهتره طرفین را به $\cos^2 x$ تقسیم کنید.

درس نامه اتحادهای اولیه مثلثات

صورت اصلی اتحاد	صورت فرعی اتحاد
۱	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
۲	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
۳	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
۴	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
۵	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

تکنیک برای ساده کردن عبارت‌هایی به فرم $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ ، دو طرف را بر $\cos^2 x$ (یا $\sin^2 x$) تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم عبارت را بر حسب $\tan x$ (یا $\cot x$) بنویسیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو طرف را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 1 \xrightarrow{+ \cos^2 x} \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 - \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x - \tan x - 1 = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x - \tan x - 2 = 0$$

گام دوم: به کمک اتحاد جمله مشترک، عبارت را تجزیه و معادله را حل می‌کنیم:

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \Rightarrow (\tan x - 2)(\tan x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \checkmark \\ \tan x = -1 \times \end{cases}$$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس باید تانژانتش مثبت باشد. در نتیجه فقط $\tan x = 2$ قبول است.

تست و پاسخ 10

دامنه تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ در بازه $(-\pi, 2\pi)$ ، چند عدد حقیقی را شامل نمی‌شود؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره دامنه تابع را احتمالاً قبل از ساده کردن ضابطه حساب کنید.

خودت حل کنی بهتره معادله $\sin 2x = 0$ را حل کنید.

درس نامه حالت خاص معادلات مثلثاتی

حالات خاص سینوسی			حالات خاص کسینوسی			
$\sin u = 0$	$\sin u = 1$	$\sin u = -1$	$\cos u = 0$	$\cos u = 1$	$\cos u = -1$	معادله
$u = k\pi$ مضارب π	$u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$	$u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$	$u = 2k\pi$ مضارب زوج π	$u = (2k+1)\pi$ مضارب فرد π	جواب کلی
						جواب‌ها روی دایره

پاسخ تشریحی گام اول: مخرج تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x}$ باید مخالف صفر باشد:

$$\sin 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$$

گام دوم: $\frac{k\pi}{2}$ های بازه $(-\pi, 2\pi)$ را پیدا می کنیم:

$$-\pi < \frac{k\pi}{2} < 2\pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} -2 < k < 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0, 1, 2, 3$$

۵ مقدار

گام سوم: پس به ازای پنج مقدار از بازه $(-\pi, 2\pi)$ ، تابع f تعریف نمی شود.

دام تستی اگر ضابطه را ساده می کردید (و به $f(x) = \frac{1}{2 \sin x}$ می رسیدید)، دامنه را اشتباه به دست آوردید. دامنه را قبل از ساده کردن باید حساب کرد.

تست و پاسخ 11

اگر انتهای کمان های α و β بر روی دایره مثلثاتی، رأس های یک مثلث متساوی الاضلاع باشند، زوج مرتب (α, β) کدام می تواند باشد؟

(۲) $(\frac{\pi}{15}, 132^\circ)$

(۱) $(90^\circ, -30^\circ)$

(۴) $(72^\circ, \frac{\pi}{15})$

(۳) $(\frac{\pi}{18}, 170^\circ)$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره هر نقطه روی دایره مثلثاتی می تواند انتهای کمان مربوط به بی شمار زاویه باشد. مثلاً 2° ، 38° و -34° هم پایان اند.

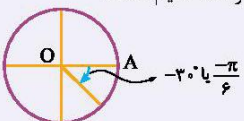
خودت حل کنی بهتره اختلاف کمان‌های متوالی باید 12° باشد.

نکات ۱) برای آن‌که سه نقطه روی دایره مثلثاتی، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند باید اختلافشان 12° یا $\frac{2\pi}{3}$ رادیان باشد، مثلاً:

$$5^\circ, 17^\circ, 29^\circ$$

$$+12^\circ \quad +12^\circ$$

۲) اگر زاویه منفی α را بخواهیم روی دایره مثلثاتی نشان دهیم، باید از نقطه A در خلاف جهت مثلثاتی حرکت کنیم، مثلاً:



۳) تبدیل سریع درجه به رادیان و برعکس:

$$D \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} R$$

$$R \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} D$$

پاسخ تشریحی گام اول: به زاویه $\frac{-3\pi}{5}$ در دو مرحله $\frac{2\pi}{3}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\theta = \frac{-3\pi}{5}, \alpha = \frac{\pi}{15}, \beta = \frac{11\pi}{15}$$

$$+ \frac{2\pi}{3} \quad + \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{-3\pi}{5} \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} -108^\circ$$

گام دوم: زاویه $\frac{-3\pi}{5}$ را به درجه تبدیل می‌کنیم:

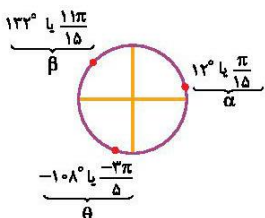
به زاویه -108° دو مرحله 12° را اضافه می‌کنیم:

$$\theta = -108^\circ, \alpha = 12^\circ, \beta = 132^\circ$$

$$+12^\circ \quad +12^\circ$$

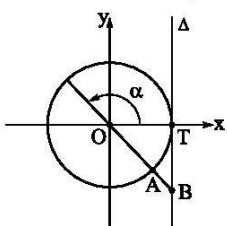
گام سوم: پس $\alpha = 12^\circ = \frac{\pi}{15}$ و $\beta = 132^\circ = \frac{11\pi}{15}$

با توجه به گزینه‌ها، زوج مرتب (α, β) می‌تواند $(\frac{\pi}{15}, 132^\circ)$ باشد.



12 تست و پاسخ

در شکل رسم‌شده، خط Δ در نقطه T بر دایره مثلثاتی مماس است. اگر $\sin \alpha = \frac{1}{6}$ ، آن‌گاه طول پاره خط AB کدام است؟



۲) ۲/۰

۱) ۱/۰

۴) ۵/۰

۳) ۲۵/۰

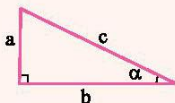
پاسخ: گزینه ۳

مشاوره بعضی وقت‌ها سوالات مثلثات را روی دایره مثلثاتی مطرح می‌کنند. روابط و آیای متمم و مکمل و هم‌چنین محور‌ها را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره زاویه AOT مکمل α است. در مثلث BOT، اندازه BO را به دست آورید.

درس نامه ۱. نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

نسبت	تعریف	با توجه به شکل
سینوس	مقابل وتر	$\sin \alpha = \frac{a}{c}$
کسینوس	مجاور وتر	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$
تانژانت	مقابل مجاور	$\tan \alpha = \frac{a}{b}$
کوتانژانت	مجاور مقابل	$\cot \alpha = \frac{b}{a}$



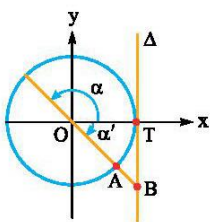
درس نامه ۲. زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم پایان

تعریف	متمم	مکمل	قرینه	هم پایان
دو زاویه که مجموعشان 90° است.	دو زاویه که مجموعشان 180° است.	قرینه θ یعنی $-\theta$.	زوایایی که اختلافشان مضربی از 360° است.	
$90^\circ - \theta$ یا $\frac{\pi}{2} - \theta$	$180^\circ - \theta$ یا $\pi - \theta$	$-\theta$	$2k\pi + \theta$ یا $360^\circ k + \theta$	
روی دایره	قرینه نسبت به محور y	قرینه نسبت به محور x	یک یا چند دور کامل می‌زنند.	
رابطه با نسبت های زاویه θ	\sin یکی با \cos دیگری و \tan یکی با \cot دیگری برابر است و بالعکس.	\sin ها برابر و بقیه قرینه هم هستند.	\cos ها برابر و بقیه قرینه هم هستند. (کسینوس منفی را می‌خورد!)	همه چی ثابت می‌ماند.
مثال	$\sin 2^\circ = \cos 7^\circ$	$\sin 12^\circ = \sin 6^\circ$	$\cos(-3^\circ) = \cos 3^\circ$	$\sin 39^\circ = \sin 3^\circ$

پاسخ تشریحی

گام اول: چون سینوس دو زاویه مکمل با هم برابر است، پس:

$$\alpha + \alpha' = 18^\circ \xrightarrow{\sin \alpha = 0/6} \sin \alpha' = 0/6$$



گام دوم: کسینوس α' را حساب می‌کنیم:

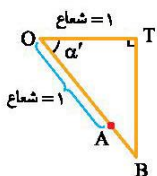
$$\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' = 1 \Rightarrow (0/6)^2 + \cos^2 \alpha' = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha' = 0/64 \Rightarrow |\cos \alpha'| = 0/8$$

$$\cos \alpha' = 0/8$$

چون α' حاده است، کسینوسش مثبت است:

گام سوم: در مثلث OTB برای زاویه α' ، کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos \alpha' = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \Rightarrow 0/8 = \frac{OT}{OB} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{1+AB} \Rightarrow 4+4AB=8 \Rightarrow AB=0/2$$



تست و پاسخ 13

دو نقطه A و B روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واقع اند. اگر طول کمان کوچک‌تر AB برابر با $\frac{1}{5}\pi$ باشد، مساحت مثلث AOB کدام است؟

۳ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

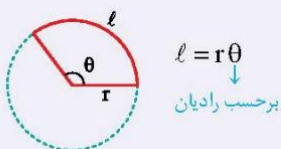
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شاید در کنکور امسال یا سال‌های بعد از محاسبه طول کمان سؤال داشته باشیم!

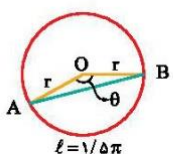
خودت حل کنی بهتره

زاویه \times شعاع = طول کمان
(rad)

نکته طول کمان روبه‌رو به زاویه θ رادیان در دایره‌ای به شعاع r :



پاسخ تشریحی گام اول: برای اطلاعات سؤال، شکل مناسب می‌کشیم:



$$l = r\theta \Rightarrow \frac{1}{5}\pi = 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{10}\pi \xrightarrow{\times \frac{180^\circ}{\pi}} \theta = 18^\circ$$

گام دوم: زاویه θ را حساب می‌کنیم:

گام سوم: با داشتن دو ضلع و زاویه بین، مساحت مثلث AOB را حساب می‌کنیم:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

تست و پاسخ 14

در ربع دایره رسم شده، محیط ناحیه رنگی به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

۴ (۲)

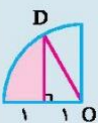
۳ (۱)

۶ (۴)

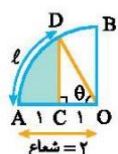
۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره خط OD را به شکل اضافه کنید:



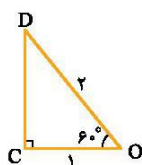
پاسخ تشریحی گام اول: قسمت سفید را به یک مثلث و یک قطاع تبدیل می‌کنیم:



$$\cos \theta = \frac{CO}{DO} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

گام دوم: در مثلث DOC داریم:

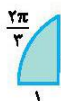
گام سوم: طول CD را به کمک فیثاغورس حساب می‌کنیم:



$$CD^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow CD = \sqrt{3}$$

$$60^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

$$\ell = r\theta \Rightarrow \ell = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



$$\Rightarrow \text{محیط} = 1 + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \approx 1 + 1.73 + 2.1 = 4.83$$

گام چهارم: θ را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

گام پنجم: طول کمان AD را حساب می‌کنیم:

گام ششم: محیط قسمت رنگی برابر است با:

با توجه به گزینه‌ها، 4.83 به عدد ۵ نزدیک‌تر است.

تست و پاسخ 15

با فرض $\frac{1}{3} = \tan 2^\circ$ ، حاصل $\frac{\sin 11^\circ - \cos 7^\circ}{1 - \sin^2 29^\circ}$ کدام است؟

$$-\frac{3^\circ}{19} (4)$$

$$-\frac{3^\circ}{17} (3)$$

$$-\frac{6^\circ}{19} (2)$$

$$-\frac{6^\circ}{17} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سوال مربوط به کمان‌های $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ جزء سوالات پرتکرار در کنکور است. اگر در آن گیر دارید، درس‌نامه این تست را بخوانید.

خودت حل کنی بهتره همه زوایا را برحسب 2° بنویسید، مثلاً $29^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2^\circ$.

درس‌نامه .. ساده کردن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$

می‌خواهیم رابطه نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{\pi}{4} \pm \alpha$ ، $\pi \pm \alpha$ ، $\frac{3\pi}{4} \pm \alpha$ و $2\pi \pm \alpha$ را با نسبت‌های مثلثاتی زاویه α به دست آوریم. برای این کار مراحل زیر را می‌رویم.

(۱) **تغییر اسم می‌دهد یا نه:** اگر زاویه α با کمان‌های π یا 2π جمع شده بود، تغییر اسمی در کار نیست؛ ولی اگر α با $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ جمع شده بود، نسبت مثلثاتی تغییر اسم می‌دهد؛ یعنی \sin می‌شود \cos (و بالعکس) و \tan می‌شود \cot (و بالعکس).

(۲) **علامت:** با فرض حاده بودن α (مثلاً 1°)، ربعی که زاویه $\frac{\pi}{4} \pm \alpha$ یا ... در آن قرار می‌گیرد را پیدا می‌کنیم و مشخص می‌کنیم علامت نسبت اولیه در آن ربع مثبت بوده است یا منفی.

چندتا مثال ببینید:

$$\left. \begin{array}{l} \text{به خاطر } \frac{3\pi}{4}, \sin \text{ می‌شود } \cos. \\ \sin < 0 \text{ و } \frac{3\pi}{4} \text{ در ربع ۴ می‌افتد} \end{array} \right\} \leftarrow \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = -\cos \alpha \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{به خاطر } \pi, \cos \text{ خودش می‌ماند.} \\ \cos < 0 \text{ و } \pi \text{ در ربع ۳ می‌افتد} \end{array} \right\} \leftarrow \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad (2)$$

پاسخ تشریحی گام اول: چون $\tan 2^\circ$ را داریم، همه نسبت‌ها را بر حسب زاویه 2° می‌نویسیم:

- $\sin 11^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2^\circ\right) \xrightarrow{\text{تغییر اسم می‌ده.}} \cos 2^\circ$
 $\sin > 0$: ربع دو
- $\cos 7^\circ \xrightarrow{\text{متمم}} \sin 2^\circ$
- $\cos 20^\circ = \cos(\pi + 2^\circ) \xrightarrow{\text{تغییر اسم نمی‌ده.}} -\cos 2^\circ$
 $\cos < 0$: ربع سه
- $\sin 29^\circ = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2^\circ\right) \xrightarrow{\text{تغییر اسم می‌ده.}} -\cos 2^\circ$
 $\sin < 0$: ربع چهار

گام دوم: پس عبارت داده‌شده به شکل زیر می‌شود:

$$\frac{\sin 11^\circ - \cos 7^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ} = \frac{\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{\cos^3 2^\circ - \frac{1}{\cos 2^\circ}}$$

گام سوم: هر چهار عبارت را بر $\cos 2^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ} - \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}}{\frac{1}{\cos^2 2^\circ} - \frac{1}{\cos^2 2^\circ}} = \frac{1 - \tan 2^\circ}{\cos^2 2^\circ - \frac{1}{\cos^2 2^\circ}}$$

گام چهارم: از رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ داریم: $1 + \tan^2 2^\circ = \frac{1}{\cos^2 2^\circ} \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 2^\circ} \Rightarrow \cos^2 2^\circ = \frac{9}{10}$

گام پنجم: به کمک $\tan 2^\circ = \frac{1}{3}$ و $\cos^2 2^\circ = \frac{9}{10}$ داریم:

$$\frac{1 - \tan 2^\circ}{\cos^2 2^\circ - \frac{1}{\cos^2 2^\circ}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{9}{10} - \frac{10}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-19}{9}} = \frac{-6}{19}$$

تست و پاسخ 16

تابع f یک تابع متناوب با دوره تناوب 3 است که در فاصله $[-2, 1]$ ضابطه آن به صورت $y = 1 - \frac{x+3|x|}{4}$ می‌باشد. سطح محصور بین نمودار f و محور x در فاصله $\left(\frac{-11}{3}, \frac{7}{3}\right)$ کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ / ۵ (۳)

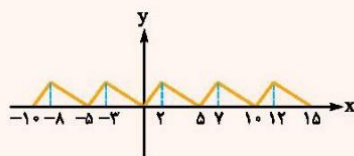
پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در این مدل سوال‌ها لازم نیست نمودار را در بازه خواسته شده رسم کنید. شبیه این سوال در کنکور ۱۴۰۰ هم آمده بود.

خودت حل کنی بهتره طول بازه $\left(\frac{-11}{3}, \frac{7}{3}\right)$ چند برابر T است؟ در توابع متناوب، مساحت بین منحنی و محور x در تمام بازه‌هایی که طولشان T باشد، یکسان است.

درس نامه دوره تناوب

نمودار روبه‌رو را ببینید:



انگار شکل ۵ کپی شده و در قبل و بعد از آن تکرار شده است. طول بازه این شکل ۵ واحد است. اصطلاحاً می‌گوییم تابع بالا یک تابع متناوب با دوره تناوب $T = 5$ است.

تنگر ممکن است شما بگویید دوره تناوب را ۱۰ هم می‌توانیم بگیریم. جواب ما این است که باید کوچک‌ترین عدد مثبت ممکن را انتخاب کنید.

در این تابع رابطه $f(x+5) = f(x)$ برقرار است و با توجه به آن، تساوی‌های دیگری را می‌توانیم بنویسیم:

$$\dots = f(-4) = f(1) = f(6) = f(11) = \dots$$

$\xrightarrow{+5}$ $\xrightarrow{+5}$ $\xrightarrow{+5}$

تعریف: می‌گوییم f تابعی متناوب است، اگر عدد مثبتی مثل T پیدا شود که هر دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) $f(x+T) = f(x)$

(۲) اگر $x \in D_f$ بود، آن‌گاه $(x \pm T) \in D_f$ باشد.

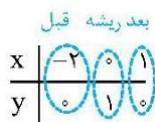
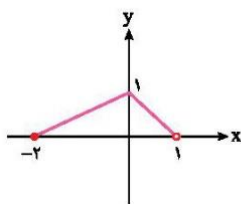
به کوچک‌ترین مقدار مثبت T ، دوره تناوب می‌گوییم.

نکته اگر مساحت بین تابع متناوب f و محور x ها در بازه‌ای به طول T برابر S باشد، مجموع مساحت بین تابع f و محور x ها در بازه‌هایی

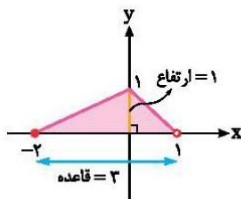
به طول $k \times T$ ، برابر با $k \times S$ است.

عدد طبیعی

پاسخ تشریحی گام اول: نمودار تابع $y = 1 - \frac{x+3|x|}{4}$ با دامنه $[-2, 1]$ را رسم می‌کنیم:



گام دوم: مساحت بین منحنی f و محور x ها در یک دوره تناوب را حساب می‌کنیم:



$$S = \frac{1 \times 3}{2} = 1.5$$

$$\frac{7}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = 6$$

\downarrow
۲T

گام سوم: طول بازه $(-\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$ برابر است با:

گام چهارم: چون طول بازه ۲ برابر دوره تناوب شد، پس مساحت بین f و محور x ها در این بازه، ۲ برابر مساحت بین f و محور x ها در یک دوره تناوب است:

$$S_{\text{مورد نظر}} = 2 \times 1.5 = 3$$

تست و پاسخ 17

در تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، اگر بیشترین مقدار تابع برابر ۵ و کمترین مقدارش برابر -۱ باشد، $|a| + c$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره $\min = -|a| + c$ و $\max = |a| + c$

درس نامه •• برای عبارتهای به فرم $a \sin(bx + d) + c$ و $a \cos(bx + d) + c$ داریم:

فرمول	فرمول به فارسی!	مثال در $2 \sin(6x) - 5$
$ a + c$ max	عدد بیرونی + ضرب پست sin یا cos	$ 2 + (-5) = -3$
$- a + c$ min	عدد بیرونی + ضرب پست sin یا cos	$- 2 + (-5) = -7$

پاسخ تشریحی گام اول: بیشترین و کمترین مقدار عبارت $a \sin(bx) + c$ به ترتیب برابر با ۵ و -۱ است، پس:

• $\max = |a| + c \rightarrow 5 = |a| + c$

• $\min = -|a| + c \rightarrow -1 = -|a| + c$

گام دوم: از جمع طرفین دو معادله بالا به $2c = 4$ می‌رسیم که در نتیجه $c = 2$.

$5 = |a| + 2 \rightarrow |a| = 3$

گام سوم: با جای گذاری $c = 2$ در $5 = |a| + c$ ، داریم:

$2|a| + c = 2(3) + 2 = 8$

گام چهارم: پس:

تست و پاسخ 18

تابع $f(x) = 3 \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$ را با دامنه $[0, \pi]$ در نظر بگیرید. این تابع در $x = \alpha$ بیشترین و در $x = \beta$ کمترین مقدار خود را دارد. حاصل $\frac{\alpha}{\beta}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره برای به دست آوردن α و β به ترتیب باید معادله‌های $\cos(\frac{\pi}{3} - 2x) = 1$ و $\cos(\frac{\pi}{3} - 2x) = -1$ را حل کنید.

max	min
$ a + c$	$- a + c$

نکته برای عبارتهای به فرم $a \sin(bx + d) + c$ و $a \cos(bx + d) + c$ داریم:

پاسخ تشریحی گام اول: کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = 3 \cos(-2x + \frac{\pi}{3}) + 0$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \max = |3| + 0 = 3 \\ \min = -|3| + 0 = -3 \end{cases}$$

گام دوم: برای به دست آوردن α و β به ترتیب باید معادله‌های $f(x) = 3$ و $f(x) = -3$ را حل کنیم:

• $f(x) = 3 \Rightarrow 3 \cos(-2x + \frac{\pi}{3}) = 3 \Rightarrow \cos(-2x + \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow -2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi \xrightarrow{+(-\frac{\pi}{3})} x = -k\pi + \frac{\pi}{6}$

$$\alpha = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

به ازای $k = 0$ ، جوابمان در بازه $[0, \pi]$ قرار می‌گیرد که همان α است:

$$f(x) = -3 \Rightarrow 3 \cos(-2x + \frac{\pi}{3}) = -3 \Rightarrow \cos(-2x + \frac{\pi}{3}) = -1 \Rightarrow -2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi \Rightarrow 2x = -2k\pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{\div 2} x = -k\pi - \frac{\pi}{3}$$

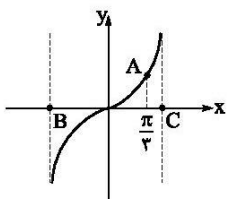
$$\beta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

به ازای $k = -1$ ، جوابمان در بازه $[0, \pi]$ قرار می‌گیرد که همان β است:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{4}$$

گام سوم: پس:

19 تست و پاسخ



قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{3} \tan(\frac{x}{4})$ در شکل زیر رسم شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

$$\pi (2)$$

$$3\pi (4)$$

$$\frac{\pi}{2} (1)$$

$$2\pi (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره رسم نمودار $y = a \tan(bx) + c$ را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره طول پاره خط BC همان T است.

درس نامه •• تابع تانژانت و کتانژانت

$y = \cot x$	$y = \tan x$	ضابطه
		نمودار
π	π	دوره تناوب
مضارب π یعنی $k\pi$	مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ یعنی $(2k+1)\frac{\pi}{2}$	نقاطی که در دامنه نیستند.
مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ یعنی $(2k+1)\frac{\pi}{2}$	مضارب π یعنی $k\pi$	برخورد با محور xها
بین دو خطچین عمودی، نزولی	بین دو خطچین عمودی، صعودی	یکنواپی
\mathbb{R}	\mathbb{R}	برد

نکته در نمودار تابع $y = a \tan(bx) + c$ ، فاصله بین دو خطچین عمودی متوالی برابر با دوره تناوب $(T = \frac{\pi}{|b|})$ است.

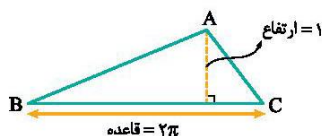
پاسخ تشریحی گام اول: طول پاره خط BC برابر با دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{3} \tan(\frac{x}{2})$ است:

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \Rightarrow BC = 2\pi$$

$$y_A = f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$

گام دوم: مقدار f در $x = \frac{\pi}{6}$ برابر با عرض نقطه A است:

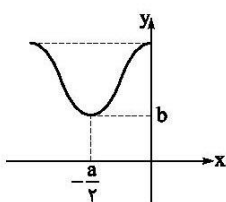
گام سوم: مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S_{ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$$

تست و پاسخ 20

قسمتی از نمودار $f(x) = a - b \sin(\pi(2ax - \frac{1}{4}))$ رسم شده است. حاصل $a + b$ کدام است؟



$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره نمودار توابع سینوسی یا کسینوسی جزء سؤالات پرنکرار کنکور است. اگر در حلشان مشکل دارید، حتماً درس نامه این تست را بخوانید.

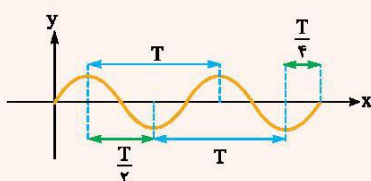
خودت حل کنی بهتره طبق نمودار، $\frac{a}{2}$ نصف دوره تناوب و b مینیمم تابع است.

درس نامه به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع سینوسی و کسینوسی

ممکن است نمودار توابع $y = a \sin(bx) + c$ یا $y = a \cos(bx) + c$ را به ما بدهند و از ما ضرایب a، b و c را بخواهند. برای حل این سؤالها، گامهای زیر را می‌رویم:

(۱) ساده کردن: اگر ضابطه ساده می‌شد، حتماً ساده می‌کنیم؛ مثلاً جای $4 \sin(\frac{\pi}{4} - x)$ می‌نویسیم $4 \cos x$.

(۲) دوره تناوب (T): اگر از روی شکل، دوره تناوب معلوم بود، $\frac{2\pi}{|b|}$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا |b| به دست آید.



نکته «فاصله ۲ نقطه max متوالی» یا «فاصله ۲ نقطه min متوالی» برابر با T و

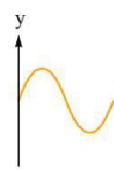
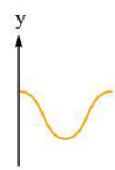
«فاصله min و max متوالی» برابر با $\frac{T}{2}$ است:

(۳) max و min: اگر مقدار max و min روی نمودار معلوم بود، از معادلات

$$\max = |a| + c \text{ و } \min = -|a| + c, \text{ مقدار } |a| \text{ و } c \text{ را حساب می‌کنیم.}$$

(۴) نقطه کمکی: اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جای‌گذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد.

(۵) علامت a و b : برای تعیین علامت a و b از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

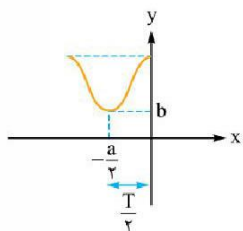
نمودار سینوسی		نمودار کسینوسی	
	شکل نمودار در سمت راست محور y		نمودار کسینوسی
صعودی یا مثل $\sin x$	$(ab > 0)$ a و b هم علامت‌اند.	نزولی یا مثل $-\sin x$	$(ab < 0)$ a و b ناهم علامت‌اند.
$a > 0$		$a < 0$	

پاسخ تشریحی گام اول: ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a - b \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi x\right)$$

$$f(x) = \underbrace{b}_{\text{A}} \cos(\underbrace{2\pi}_{\text{B}} x) + \underbrace{a}_{\text{C}}$$



گام دوم: با توجه به شکل، نصف دوره تناوب $\frac{a}{4}$ است، پس $T = a$.

دقت کنید چون $\frac{-a}{4} < 0$ ، پس $a > 0$.

$$T = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|} = \frac{2\pi}{|2\pi a|} = \frac{1}{|a|} \xrightarrow{a > 0} \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

باید a با $\frac{1}{a}$ برابر باشد:

تا این‌جا ضابطه به صورت روبه‌رو شد:

$$f(x) = \underbrace{b}_{\text{A}} \cos(\underbrace{2\pi}_{\text{B}} x) + \underbrace{1}_{\text{C}}$$

$$-|b| + 1 = b \xrightarrow{\text{دو حالت}} \begin{cases} b \geq 0: -b + 1 = b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \checkmark \\ b < 0: b + 1 = b \Rightarrow 1 = 0 \times \end{cases}$$

گام سوم: مینیمم تابع برابر b است، پس:

$$a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

گام چهارم: در نتیجه:

تست و پاسخ 21

$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$$

اندازه زاویه θ را ۲ برابر می‌کنیم، اگر سینوسش $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر شود، تانژانت زاویه θ کدام می‌تواند باشد؟

$$\sqrt{7} \quad (2)$$

$$\sqrt{6} \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

خودت حل کنی بهتره

درس نامه ۱. اتحادهای زوایای دو برابر کمان یا همان 2α

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتایج (روابط طلایی)}} \begin{cases} 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

درس نامه ۲. اتحادهای اولیه مثلثات

صورت اصلی اتحاد	صورت فرعی اتحاد	
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$	۱
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\tan x \cdot \cot x = 1$ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$	۲
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$		۳
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		۴
$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$		۵

پاسخ تشریحی: گام اول، $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر $\sin \theta$ است؛ پس:

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\sin \theta \neq 0} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2 \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

گام دوم، به کمک اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم: $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2} \Rightarrow 1 + \tan^2 \theta = 8 \Rightarrow \tan^2 \theta = 7 \Rightarrow \tan \theta = \pm \sqrt{7}$ در گزینه‌ها فقط $\sqrt{7}$ را داریم.

تست و پاسخ 22

عبارت $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ} - \frac{\cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}$ با کدام گزینه برابر است؟

(۲) $2 \cot 50^\circ$

(۱) $-\cot 40^\circ$

(۴) $-2 \tan 50^\circ$

(۳) $\tan 40^\circ$

پاسخ: گزینه ۴

خوبت حل کنی بهتره مخرج مشترک بگیرد و بعد از اتحادهای 2α استفاده کنید.

درس نامه... اتحادهای زوایای دو برابر کمان یا همان 2α

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow[\text{(روابط طلایی)}]{\text{نتایج}} \begin{cases} 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

نکته اگر دو زاویه متمم باشند، «سینوس یکی با کسینوس دیگری» و «تانژانت یکی با کتانژانت دیگری» برابر است.

پاسخ تشریحی گام اول، جای $\sin 70^\circ$ و $\cos 70^\circ$ به ترتیب $\cos 20^\circ$ و $\sin 20^\circ$ می نویسیم و مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ} - \frac{\cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ - \cos^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{-(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ)}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

گام دوم، در صورت از اتحاد $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ و در مخرج از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می کنیم:

$$\frac{-(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ)}{\frac{1}{2} \sin(2(20^\circ))} = \frac{-\cos 40^\circ}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} = -2 \times \frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = -2 \cot 40^\circ$$

گام سوم، زوایای 40° و 50° متمم اند، پس جای $\cot 40^\circ$ می نویسیم $\tan 50^\circ$:
 $-2 \cot 40^\circ = -2 \tan 50^\circ$

تست و پاسخ 23

حاصل $\sin^2 \frac{5\pi}{16} - \sin^2 \frac{3\pi}{16}$ کدام است؟

$$\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در زوایای ناآشنا مثل $\frac{5\pi}{16}$ و $\frac{3\pi}{16}$ ، همیشه نیم نگاه به جمع و تفاضلشان داشته باشید.

خودت حل کنی بهتره جای $\sin \frac{5\pi}{16}$ از کسینوس متمم استفاده کنید.

درس نامه... نسبت های مثلثاتی زوایای $22/5^\circ$ و $67/5^\circ$

برای محاسبه $\sin 22/5^\circ$ و $\cos 22/5^\circ$ از روابط طلایی کمک می گیریم.

$$1) 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=22/5^\circ} 1 + \cos 45^\circ = 2 \cos^2 22/5^\circ \Rightarrow 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos^2 22/5^\circ$$

$$\Rightarrow \cos^2 22/5^\circ = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\cos 22/5^\circ > 0} \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

یا $\sin 67/5^\circ$

$$2) 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=22/5^\circ} 1 - \cos 45^\circ = 2 \sin^2 22/5^\circ \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin^2 22/5^\circ$$

$$\Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\sin 22/5^\circ > 0} \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

یا $\cos 67/5^\circ$

پاسخ تشریحی گام اول: جمع $\frac{3\pi}{16}$ و $\frac{5\pi}{16}$ می‌شود $\frac{\pi}{4}$ ، یعنی دو زاویه متمم‌اند؛ پس جای $\sin \frac{5\pi}{16}$ می‌توانیم بنویسیم $\cos \frac{3\pi}{16}$:

$$\sin^2 \frac{5\pi}{16} - \sin^2 \frac{3\pi}{16} = \cos^2 \frac{3\pi}{16} - \sin^2 \frac{3\pi}{16}$$

$$\cos^2 \frac{3\pi}{16} - \sin^2 \frac{3\pi}{16} = \cos \left(2 \left(\frac{3\pi}{16} \right) \right) = \cos \frac{3\pi}{8}$$

گام دوم: از اتحاد $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin \frac{\pi}{8} \text{ و } \frac{3\pi}{8} \text{ متمم‌اند؛ پس جای } \cos \frac{3\pi}{8} \text{ می‌نویسیم } \sin \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{گام چهارم: رادیان برابر با } \frac{\pi}{8} \text{ است.}$$

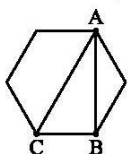
گام پنجم: از رابطهٔ طلایی $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم و به جای α ، $22/5^\circ$ قرار می‌دهیم:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=22/5^\circ} 1 - \cos 45^\circ = 2 \sin^2 22/5^\circ \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin^2 22/5^\circ \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

تست و پاسخ 24

در شش ضلعی منتظم رسم شده، اگر $BC = \sqrt{6}$ و نیمساز زاویهٔ BAC ضلع CB را در D قطع کند، مساحت مثلث ADB کدام است؟



$$3(2 + \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$9(2 - \sqrt{3}) \quad (1)$$

$$3(\sqrt{2} + 1) \quad (4)$$

$$9(\sqrt{2} - 1) \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره پیشنهاد می‌کنم \sin و \cos زوایای 15° و 75° را حفظ باشید.

خودت حل کنی بهتره $\tan 15^\circ$ را به دست آورید. بعد در مثلث ADB به کمک آن، اندازهٔ DB را پیدا کنید.

درس نامه •• نسبت‌های مثلثاتی زوایای 15° و 75°

برای محاسبهٔ $\sin 15^\circ$ و $\cos 75^\circ$ از روابط طلایی کمک می‌گیریم.

$$1) 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=15^\circ} 1 + \cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ \Rightarrow 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos 15^\circ}_{\sin 75^\circ \text{ یا}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$2) 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=15^\circ} 1 - \cos 30^\circ = 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin 15^\circ}_{\cos 75^\circ \text{ یا}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

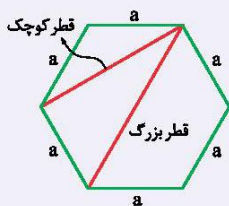
نکته نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵° و (۷۵°) و $۲۲/۵^\circ$ و $(۶۷/۵^\circ)$ را بلد باشید.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
۱۵°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$	$۲-\sqrt{3}$	$۲+\sqrt{3}$
۷۵°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	$۲+\sqrt{3}$	$۲-\sqrt{3}$
$۲۲/۵^\circ$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-۱$	$\sqrt{2}+۱$
$۶۷/۵^\circ$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}+۱$	$\sqrt{2}-۱$

تذکر اگر سطرهای مربوط به ۱۵° و $۲۲/۵^\circ$ را بلد باشید کافی است. چون ۷۵° و $۶۷/۵^\circ$ به ترتیب متمم ۱۵° و $۲۲/۵^\circ$ هستند و از روابط دو زاویه متمم به دست می‌آیند.

نکته اندازه هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم از رابطه $\frac{(n-2) \times ۱۸۰^\circ}{n}$ به دست می‌آید.

نکته روابط مهم در شش‌ضلعی منتظم در جدول زیر آمده است:



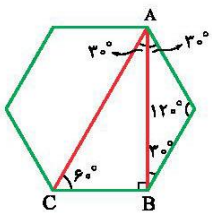
مساحت	قطر کوچک	قطر بزرگ
$۶ \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$a\sqrt{3}$	$۲a$

$$\frac{(6-2) \times ۱۸۰^\circ}{6} = ۱۲۰^\circ$$

گام اول: اندازه هر زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر است با:

پاسخ تشریحی

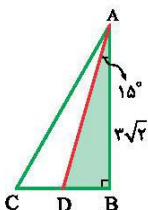
گام دوم: زوایا را روی شکل مشخص می‌کنیم:



$$AB = a\sqrt{3} = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = ۳\sqrt{۲}$$

گام سوم: قطر کوچک شش‌ضلعی است و برابر است با:

گام چهارم: نیمساز A را رسم می‌کنیم. این نیمساز ضلع CB را در D قطع می‌کند:



گام پنجم: در مثلث ABD، برای رأس A، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan ۱۵^\circ = \frac{DB}{AB} \Rightarrow ۲-\sqrt{3} = \frac{DB}{۳\sqrt{۲}} \Rightarrow DB = ۳\sqrt{۲}(۲-\sqrt{3})$$

محاسبه $\tan 15^\circ$: باید $\sin 15^\circ$ را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم کنیم:

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

$$S_{ABD} = \frac{AB \times DB}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2} = 9(2-\sqrt{3})$$

گام ششم: مساحت مثلث ADB برابر است با:

تست و پاسخ 25

نقطه A، یک نقطه مینیمم تابع $f(x) = 2 - \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}$ و B، نقطه ماکزیمم بلافاصله بعد از A است. شیب پاره خط AB کدام است؟

$$\frac{1}{4\pi} \quad (4)$$

$$\frac{2}{\pi} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در توابع متناوب، دو نقطه min و max متوالی را هر جایی می‌توانید انتخاب کنید.

خوبت حل کنی بهتره دو بار از اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده کنید.

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

نکته

پاسخ تشریحی گام اول: دو بار از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = -\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + 2 = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} + 2 = -\frac{1}{4} \sin(x) + 2$$

گام دوم: برای آن که عبارت $-\frac{1}{4} \sin(x) + 2$ ماکزیمم باشد، باید $\sin x = -1$ و برای آن که مینیمم باشد، باید $\sin x = 1$ باشد.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

• برای نقطه min x را برابر $\frac{\pi}{4}$ قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

• در نقطه max بلافاصله بعد از آن، x برابر $\frac{3\pi}{4}$ است و داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{7}{4}}{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

گام سوم: شیب AB برابر است با:

تست و پاسخ 26

انتهای کمان‌های جواب معادله $\cos 2x + 3 \sin x = 2$ بر روی دایره مثلثاتی رأس‌های یک چندضلعی هستند. مساحت این چندضلعی کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره وقتی در معادله مثلثاتی می‌پرسند «نقاط انتهایی کمان‌های جواب، تشکیل چه شکلی می‌دهند؟»، باید جواب‌های در بازه $[0, 2\pi]$ را پیدا و روی دایره به طور متوالی به هم وصل کنید.

خودت حل کنی بهتره جای $\cos 2x$ بنویسید $1 - 2\sin^2 x$ و بعد تغییر متغیر بدهید.

تکنیک

۱ برای حل معادله‌هایی به فرم $a \cos 2x + b \sin x = c$ ، به جای $\cos 2x$ می‌نویسیم $1 - 2\sin^2 x$ و بعد از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده می‌کنیم.

۲ برای حل معادله‌هایی به فرم $a \cos 2x + b \cos x = c$ ، به جای $\cos 2x$ می‌نویسیم $2\cos^2 x - 1$ و بعد از تغییر متغیر $\cos x = t$ استفاده می‌کنیم.

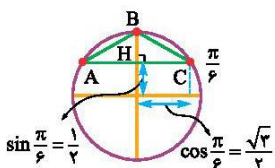
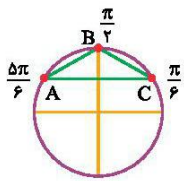
پاسخ تشریحی گام اول: به جای $\cos 2x$ می‌نویسیم $1 - 2\sin^2 x$:

$$\cos 2x + 3 \sin x = 2 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3 \sin x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\frac{2}{a} \sin^2 x - \frac{3}{b} \sin x + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{گام دوم: مجموع ضرایب معادله بالا صفر است، پس ریشه‌های آن ۱ و } \frac{c}{a} \text{ هستند:}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \text{گام سوم: جواب‌های هر دو معادله را در بازه } [0, 2\pi] \text{ پیدا می‌کنیم:}$$

گام چهارم: جواب‌های به دست آمده را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



گام پنجم: باید مساحت مثلث ABC را حساب کنیم:

$$\left. \begin{aligned} BH &= 1 - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ AC &= 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\frac{1}{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

تست و پاسخ 27

اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \cos ax$ برابر ۱ باشد، آن‌گاه معادله $f(x) + f(2x) = -1$ در بازه $[0, 2]$ چند جواب دارد؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره معادله مثلثاتی از سوالات همیشگی کنکور است. این‌جا با دوره تناوب ترکیب شده، ولی اصل سؤال، معادله است.

خودت حل کنی بهتره $\frac{2\pi}{|a|}$ باید ۱ باشد.

درس نامه . حالت خاص معادلات مثلثاتی

حالات خاص سینوسی			حالات خاص سینوسی			
$\cos u = -1$	$\cos u = 1$	$\cos u = 0$	$\sin u = -1$	$\sin u = 1$	$\sin u = 0$	معادله
$u = (2k+1)\pi$ مضارب فرد π	$u = 2k\pi$ مضارب زوج π	$u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$	$u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$	$u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$u = k\pi$ مضارب π	جواب کلی
						جواب‌ها روی دایره

پاسخ تشریحی گام اول: دوره تناوب $\cos ax$ برابر ۱ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|a|} = 1 \Rightarrow |a| = 2\pi$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، پس با انتخاب $a = 2\pi$ (یا $a = -2\pi$) جواب تغییری نمی‌کند.

گام دوم: با توجه به $f(x) = \cos 2\pi x$ ، معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) + f(2x) = -1 \Rightarrow \cos 2\pi x + \cos 4\pi x = -1 \Rightarrow \cos 2\pi x + 1 + \cos 4\pi x = 0$$

گام سوم: از اتحاد $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\pi x + 1 + \underbrace{\cos 4\pi x}_{2 \cos^2 2\pi x} = 0 \Rightarrow \cos 2\pi x + 2 \cos^2 2\pi x = 0 \xrightarrow{\text{فکتور}} \cos 2\pi x (1 + 2 \cos 2\pi x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\pi x = 0 \\ \cos 2\pi x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

گام چهارم: معادله اولی حالت خاص است:

$$\begin{aligned} \cos 2\pi x = 0 &\xrightarrow{\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}} 2\pi x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{+ \pi} 2x = k + \frac{1}{2} \xrightarrow{+ 2} x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4} \\ x = \frac{2k+1}{4} &\xrightarrow{k=0,1,2,3} x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4} \end{aligned}$$

جواب‌های در بازه $[0, 2]$ را می‌خواهیم:

معادله دومی را به کمک فرم کلی معادله سینوسی حل می‌کنیم:

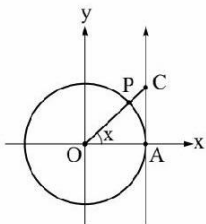
$$\cos 2\pi x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\pi x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{+ 2\pi} x = k \pm \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = k + \frac{1}{3} \xrightarrow{k=0,1} x = \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \\ x = k - \frac{1}{3} \xrightarrow{k=1,2} x = \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right\}$$

گام پنجم: پس معادله در بازه $[0, 2]$ ، ۸ جواب دارد:

تست و پاسخ 28

در دایره مثلثاتی روبه‌رو اگر $\tan \frac{x}{2} = t$ ، آن‌گاه طول PC کدام است؟



$$\frac{2t^2}{1-t^2} \quad (2)$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} \quad (4)$$

$$\frac{2t^2}{1+t^2} \quad (1)$$

$$\frac{t^2}{1-t^2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را می‌توانیم برحسب تانژانت نصف آن زاویه بنویسیم:

$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$	$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$	$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$
---	---	---

پاسخ تشریحی گام اول: در مثلث OCA، برای زاویه x، کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos x = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{OP + PC} = \frac{1}{1 + PC} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{\cos x} = 1 + PC \Rightarrow PC = \frac{1}{\cos x} - 1$$

گام دوم: جای $\cos x$ می‌نویسیم:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$PC = \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} - 1 = \frac{1 + t^2 - 1 + t^2}{1 - t^2} = \frac{2t^2}{1 - t^2}$$

پس:

تست و پاسخ 29

در کدام یک از حالت‌های زیر، $|\sin 2\alpha - \sin \alpha|$ عدد کوچک‌تری است؟

$$\cos \alpha = 0/9 \quad (4)$$

$$\cos \alpha = 0/8 \quad (3)$$

$$\cos \alpha = 0/6 \quad (2)$$

$$\cos \alpha = 0/1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره از اتحادهای $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ استفاده کنید.

پاسخ تشریحی گام اول: عبارت داده‌شده را به کمک اتحاد $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A = |\sin 2\alpha - \sin \alpha| = |2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha| = |\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)|$$

گام دوم: در هر گزینه به کمک اتحاد $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ، مقدار $\sin \alpha$ را حساب می‌کنیم و در A قرار می‌دهیم:

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{99}{100} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

$$A = |\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)| = \left| \frac{3\sqrt{11}}{10} \left(2 \cdot \frac{1}{9} - 1\right) \right| = \frac{24\sqrt{11}}{100} \approx \frac{24 \times 3}{100}$$

$$\textcircled{2} \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{64}{100} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{8}{10}$$

$$A = |\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)| = \left| \frac{8}{10} \left(2 \cdot \frac{6}{10} - 1\right) \right| = \frac{16}{100}$$

$$\textcircled{3} \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{36}{100} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{6}{10}$$

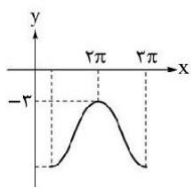
$$A = |\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)| = \left| \frac{6}{100} \left(2 \left(\frac{8}{100} \right) - 1 \right) \right| = \frac{36}{100}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{9}{100} \right)^2 = \frac{19}{100} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$A = |\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)| = \left| \frac{\sqrt{19}}{100} \left(2 \left(\frac{8}{100} \right) - 1 \right) \right| = \frac{8\sqrt{19}}{100} \approx \frac{8 \times 4.3}{100}$$

گام سوم: مخرج تمام کسرها ۱۰۰ است. کسری کوچکتر است که صورتش کوچکتر باشد. بین چهار مقدار، ۱۶ از بقیه کوچکتر است؛ پس به ازای $\alpha = 0/6$ ، $\cos \alpha = 0/6$ ، عبارتمان عدد کوچکتری می‌شود.

تست و پاسخ 30



قسمتی از نمودار تابع $y = a - b \sin\left(\frac{\pi}{4} + bx\right) + c$ رسم شده است. مقدار این تابع در $x = \frac{a\pi}{b}$ کدام است؟

۲ (۲)

۴ (۱)

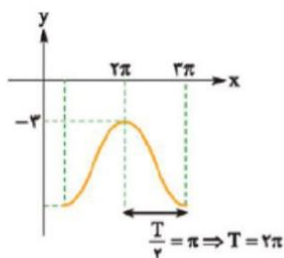
۵ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$y = -b \sin\left(\frac{\pi}{4} + bx\right) + a = \underbrace{-b}_{\cos(bx)} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{a}_{C}$$

پاسخ تشریحی: گام اول، ضابطه را ساده می‌کنیم:



گام دوم: فاصله یک min و یک max متوالی، برابر با نصف دوره تناوب است:

$$T = \frac{2\pi}{|x \text{ ضریب}|} = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$|b| = 1$$

دوره تناوب را از روی ضابطه حساب می‌کنیم:

۲π باید با $\frac{2\pi}{|b|}$ برابر باشد؛ پس:

گام سوم: مقدار max تابع -۳ است. از ماکزیمم کمک می‌گیریم:

$$\max = |A| + C \Rightarrow -3 = \underbrace{-b}_1 + a \Rightarrow a = -4$$

گام چهارم: دو حالت داریم:

$$۱) \begin{cases} a = -۴ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\cos(x) - ۴$$

$$۲) \begin{cases} a = -۴ \\ b = -۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \underbrace{\cos(-x)}_{\cos(x)} - ۴$$

نقطه $(۲\pi, -۳)$ فقط روی حالت (۲) جواب می‌دهد؛ پس $a = -۴$ و $b = -۱$ قبول است.

گام پنجم: مقدار تابع را در $x = \frac{a\pi}{b} = \frac{-۴\pi}{-۱} = ۴\pi$ حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \cos(x) - ۴ \Rightarrow f(۴\pi) = \cos(۴\pi) - ۴ = ۱ - ۴ = -۳$$

تست و پاسخ 31

جواب کلی معادله $۲\sin^2 x = ۱ + \cos x$ به صورت $x = (۲k + a)\pi$ و $a \in A$ است. مجموعه A کدام می‌تواند باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\{۱, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\} \quad (۲)$$

$$\{۱, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\} \quad (۱)$$

$$\{-۱, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\} \quad (۴)$$

$$\{-۱, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

درس‌نامه... فرم کلی معادلات مثلثاتی

معادله	فرم کلی	جواب‌ها	جواب به فارسی!
سینوسی	$\sin u = \sin v$	$\begin{cases} u = ۲k\pi + v \\ u = ۲k\pi + \pi - v \end{cases}$	دومی + مضارب T = اولی مکمل دومی + مضارب T = اولی
کسینوسی	$\cos u = \cos v$	$u = ۲k\pi \pm v$	دومی \pm مضارب T = اولی
تانژانتی	$\tan u = \tan v$	$u = k\pi + v$	دومی ۱ مضارب T = اولی

گام اول: به کمک اتحاد $۱ - ۲\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ ، معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$۲\sin^2 x = ۱ + \cos x \Rightarrow ۲\sin^2 x - ۱ = \cos x \Rightarrow -\cos 2x = \cos x \Rightarrow \cos 2x = -\cos x$$

گام دوم: جای $-\cos x$ می‌نویسیم $\cos(\pi - x)$:

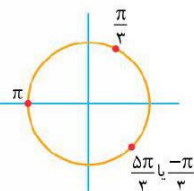
$$\cos 2x = \cos(\pi - x)$$

گام سوم: جواب معادله $\cos A = \cos B$ به صورت $A = ۲k\pi \pm B$ است، پس:

$$\cos \underbrace{2x}_A = \cos \underbrace{(\pi - x)}_B \Rightarrow 2x = ۲k\pi \pm (\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi + \pi}{۳} \\ 2x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow x = (۲k - ۱)\pi \end{cases}$$

گام چهارم: با جای‌گذاری مقادیر صحیح به جای k ، جواب‌های در محدوده $[۰, ۲\pi]$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = \frac{۲k\pi + \pi}{۳} \xrightarrow{k=۰, ۱, ۲} \frac{\pi}{۳}, \pi, \frac{۵\pi}{۳} \\ x = (۲k - ۱)\pi \xrightarrow{k=۱} \pi \end{cases} \xrightarrow{\text{روی دایره}}$$



گام پنجم: جواب $x = (2k + a)\pi$ را به شکل $x = 2k\pi + a\pi$ می‌نویسیم.

با توجه به نقاط مشخص شده روی دایره، a می‌تواند $\frac{1}{3}$ ، 1 و $\frac{5}{3}$ باشد.

تست و پاسخ 32

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{\lambda})\cos(x - \frac{3\pi}{\lambda}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\frac{3\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{9\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{7\pi}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه 1

خودت حل کنی بهتره جای $\cos(-\alpha)$ بنویسید $\cos \alpha$. حالا دو زاویه مربوط به سینوس و کسینوس مجموعشان چه قدر می‌شود؟

$$\cos(x - \frac{3\pi}{\lambda}) = \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x)$$

پاسخ تشریحی گام اول: می‌دانیم $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ پس:

گام دوم: معادله به شکل $\underbrace{\sin(x + \frac{\pi}{\lambda})}_A \underbrace{\cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x)}_B = 1$ درمی‌آید.

$$(x + \frac{\pi}{\lambda}) + (\frac{3\pi}{\lambda} - x) = \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

دو زاویه A و B متمم‌اند، چون مجموعشان $\frac{\pi}{2}$ می‌شود:

$$\sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x) = 1 \Rightarrow \underbrace{\sin(x + \frac{\pi}{\lambda})}_{\sin(x + \frac{\pi}{\lambda})} = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \pm 1$$

پس جای $\cos B$ می‌توانیم $\sin A$ بنویسیم:

گام سوم: به جای معادله $\sin u = \pm 1$ می‌توانیم معادله $\cos u = 0$ را حل کنیم (چون وقتی سینوس، 1 یا -1 باشد، کسینوس صفر است):

$$\cos(x + \frac{\pi}{\lambda}) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{\lambda}$$

گام چهارم: برای آن‌که جواب در بازه $[0, 2\pi]$ باشد، باید جای k اعداد 0 و 1 قرار دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{\lambda} \\ k=1 \Rightarrow x = \pi + \frac{3\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} \frac{7\pi}{\lambda} = \frac{7\pi}{4}$$

تست و پاسخ 33

اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم باشد، به طوری که $2\sin \alpha + 3\cos \alpha = 0$ ، آن گاه $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$$\frac{-12}{13} \quad (4)$$

$$\frac{-6}{13} \quad (3)$$

$$\frac{12}{13} \quad (2)$$

$$\frac{6}{13} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه 2

مشاوره بعضی وقت‌ها ممکن است فرمول‌ها یادمان رفته باشد ولی با اطلاعات سوال بتوانیم چند تا از گزینه‌ها را حذف کنیم. مثلاً

این‌جا که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ است، پس $90^\circ < 2\alpha < 360^\circ$ ؛ در نتیجه $\sin 2\alpha$ باید عددی منفی باشد.

ناحیه ۳ یا ۴

خودت حل کنی بهتره طرفین تساوی اولیه را به $\cos \alpha$ تقسیم کنیم.

نکته همه نسبت‌های مثلثاتی را برحسب تانژانت نصف کمانشان می‌توانیم بنویسیم:

$$1) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$2) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

پاسخ تشریحی گام اول: طرفین تساوی $2\sin\alpha + 3\cos\alpha = 0$ را به $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0}{\cos\alpha} \Rightarrow 2\tan\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-3}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2(\frac{-3}{2})}{1 + (\frac{-3}{2})^2} = \frac{-3}{1 + \frac{9}{4}} = \frac{-3}{\frac{13}{4}} = \frac{-12}{13}$$

گام دوم: به کمک اتحاد $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$ داریم:

تست و پاسخ 34

اگر خط به معادله $mx + (2m^2 - 3)y = 1$ با جهت مثبت محور x زاویه 30° بسازد، آن گاه مجموع قدرمطلق‌های مقادیر قابل قبول برای m کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$3\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، برابر با شیب خط است.

پاسخ تشریحی گام اول: شیب خط $mx + (2m^2 - 3)y = 1$ را حساب می‌کنیم:

$$(2m^2 - 3)y = -mx + 1 \xrightarrow{\div (2m^2 - 3)} y = \frac{-m}{2m^2 - 3}x + \frac{1}{2m^2 - 3}$$

شیب

$$\text{شیب} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

گام دوم: از طرفی شیب خطمان با تانژانت 30° برابر است:

گام سوم: دو مقدار به دست آمده برای شیب را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-m}{2m^2 - 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2\sqrt{3}m^2 - 3\sqrt{3} = -3m \Rightarrow 2\sqrt{3}m^2 + 3m - 3\sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\div \sqrt{3}} 2m^2 + \sqrt{3}m - 3 = 0$$

گام چهارم: معادله بالا دو جواب m_1 و m_2 دارد. سؤال از ما $|m_1| + |m_2|$ را می‌خواهد. چون ضرب ریشه‌های معادله بالا منفی است

$(P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{2})$ ، پس یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است. فرض می‌کنیم $m_1 > 0$ و $m_2 < 0$. پس: $|m_1| + |m_2| = m_1 - m_2$

گام پنجم: اختلاف ریشه‌های معادله درجه دوم از رابطه $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به دست می‌آید، پس:

$$m_1 - m_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 4(2)(-3)}}{2} = \frac{\sqrt{3+24}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

تست و پاسخ 35

مطابق شکل $AC = CM$. اگر طول AB برابر با واحد و مساحت مثلث ABC برابر با ۲ واحد مربع باشد، طول MN

چند واحد است؟

$$2 + 4\sqrt{2} \quad (2)$$

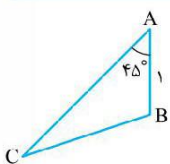
$$4 + 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$4 + \sqrt{6} \quad (4)$$

$$2 + 2\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره از C به AN و MN عمود رسم می‌کنیم.

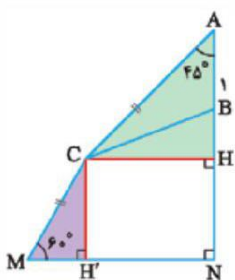


$$MC = 4\sqrt{2}$$

پاسخ تشریحی گام اول: مساحت مثلث ABC برابر با ۲ است، پس:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \times 1 \times AC \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$$

چون MC و AC برابرند، پس:



گام دوم: از C به AN و MN عمود می‌کنیم:

$$\Delta AHC: \sin \hat{A} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CH}{4\sqrt{2}} \Rightarrow CH = 4 \xrightarrow{\text{مستطیل است. } CHNH'} H'N = 4$$

$$\Delta CH'M: \cos \hat{M} = \frac{MH'}{CM} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{MH'}{4\sqrt{2}} \Rightarrow MH' = 2\sqrt{2}$$

گام سوم: MN برابر با مجموع دو پاره‌خط H'N و MH' است: $MN = 4 + 2\sqrt{2}$

تست و پاسخ 36

بیشترین فاصله بین دو ریشه متوالی معادله $\cos^2 x + \sin x = 1$ ، چند برابر کم‌ترین فاصله بین دو ریشه متوالی آن است؟

۲/۵ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

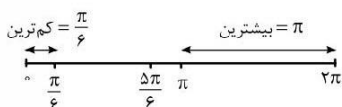
خودت حل کنی بهتره جای $\cos^2 x$ بنویسد $1 - \sin^2 x$. بعد یک معادله درجه دوم بر حسب $\sin x$ حل کنید.

پاسخ تشریحی گام اول: با اتحاد $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin x(-\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow 0, \pi, 2\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

گام دوم: جواب‌های دو معادله را در بازه $[0, 2\pi]$ می‌نویسیم:



گام سوم: جواب‌ها را روی محور اعداد ببینید:

$$\frac{\pi}{\pi} = 6$$

پس نسبت بیشترین فاصله به کم‌ترین فاصله برای دو ریشه متوالی برابر است با:

تست و پاسخ 37

اگر $\cos^2 x + \cos^2 x = 0/2$ ، آن‌گاه حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

۰/۲۵ (۲)

۲ (۱)

۱/۵ (۴)

۰/۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره $\cos^2 x$ را بر حسب $\cos x$ بنویسد.

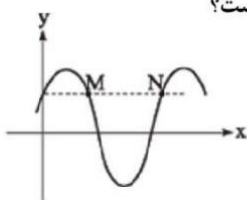
پاسخ تشریحی گام اول: با اتحاد $\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$ ، داریم:

$$\cos^2 x + \cos^2 x = 0/2 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0/2 \Rightarrow 3\cos^2 x = 1/2 \Rightarrow \cos^2 x = 0/4 = \frac{1}{5}$$

گام دوم: از اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ کمک می‌گیریم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 5 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{4}{1} = 4$$

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2 \cos(bx - \frac{\pi}{3})$ رسم شده است. اگر طول پاره خط MN برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد، b کدام است؟



$$\frac{8}{3} (2)$$

$$\frac{4}{9} (4)$$

$$\frac{4}{3} (1)$$

$$\frac{8}{9} (3)$$

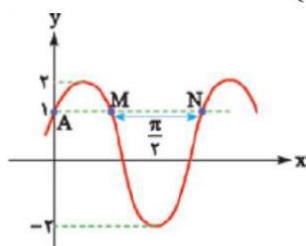
پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی: گام اول، مقدار تابع در $x=0$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = 2 \cos(bx - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(0) = 2 \cos(-\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}) = 1$$

گام دوم: چون نمودار انتقال عمودی ندارد، پس min و max آن، قرینه‌اند و برابر با:

$$f(x) = 2 \cos(bx - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \begin{cases} \max = |\cos \text{ پشت}| = |2| = 2 \\ \min = -|\cos \text{ پشت}| = -|2| = -2 \end{cases}$$



پس شکل بهتر نمودار به صورت مقابل است:

گام سوم: برای به دست آوردن طول نقاط M و N باید معادله $f(x) = 1$ را حل کنیم:

$$2 \cos(bx - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow \cos(bx - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(bx - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow bx - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} bx = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{b} \xrightarrow{k=0,1} \begin{matrix} \text{نقطه A} \\ x=0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \text{نقطه N} \\ x = \frac{2\pi}{b} \end{matrix} \\ bx = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{b} + \frac{2\pi}{3b} \xrightarrow{k=0} \begin{matrix} \text{نقطه M} \\ x = \frac{2\pi}{3b} \end{matrix} \end{cases}$$

$$\frac{2\pi}{b} - \frac{2\pi}{3b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{6\pi - 2\pi}{3b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{3b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 4b = 4 \Rightarrow b = 1$$

گام چهارم: فاصله M تا N برابر $\frac{\pi}{3}$ است؛ پس:

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4 \sin(\frac{3\pi - x}{4}) \cdot \cos(\pi - x) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\frac{73\pi}{15} \quad (4)$$

$$\frac{74\pi}{15} \quad (3)$$

$$\frac{43\pi}{15} \quad (2)$$

$$\frac{44\pi}{15} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره سمت چپ را ساده کن و بعد دو طرف را در $\sin \frac{x}{4}$ ضرب کن.

$$4 \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{4}) \cos(\pi - x) = 1 \Rightarrow 4 \cos(\frac{x}{4}) \cos x = 1$$

$\underbrace{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{4})}_{-\cos(\frac{x}{4})} \quad \underbrace{\cos(\pi - x)}_{-\cos x}$

پاسخ تشریحی گام اول: معادله را ساده تر می نویسیم:

گام دوم: دو طرف را در $\sin \frac{x}{4}$ ضرب می کنیم و از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می کنیم:

$$4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos x = \sin \frac{x}{4} \Rightarrow \underbrace{4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}}_{\frac{1}{2} \sin x} \cos x = \sin \frac{x}{4} \Rightarrow \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \sin \frac{x}{4} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{x}{4}$$

گام سوم: جواب معادلهٔ $\sin A = \sin B$ به صورت $\begin{cases} A = 2k\pi + B \\ A = 2k\pi + \pi - B \end{cases}$ است؛ پس:

$$\sin 2x = \sin \frac{x}{4} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{7}{4}x = 2k\pi \xrightarrow{\times \frac{4}{7}} x = \frac{4}{7}k\pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{9}{4}x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{4}{9}(2k\pi + \pi) \end{cases}$$

گام چهارم: جواب‌های در محدودهٔ $[0, 2\pi]$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{7}k\pi \xrightarrow{k=0,1} 0, \frac{4\pi}{7} \\ x = \frac{4}{9}(2k\pi + \pi) \xrightarrow{k=0,1,2} \frac{2\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{10\pi}{9} \end{cases}$$

چون دو طرف معادله را در $\sin \frac{x}{4}$ ضرب کرده بودیم، ممکن است ریشهٔ نادرستی به معادله اضافه شده باشد.

از بین ۵ جواب به دست آمده، فقط آن‌هایی را چک می کنیم که $\sin \frac{x}{4}$ را صفر می کنند، یعنی $x = 0$ و $x = 2\pi$.

$$\frac{4\pi}{7} + \frac{2\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} = \frac{20\pi + 6\pi + 14\pi}{18} = \frac{40\pi}{9}$$

هر دو جواب رد می شوند. مجموع سه جواب معادله در این بازه برابر است با:

آزمون‌های سراسر
گاج

۳ 5 اگر α و β متمم هم باشند، داریم:
 $\cos \alpha = \sin \beta, \tan \alpha = \cot \beta$

پس:

$$\sin 66^\circ = \cos 24^\circ \xrightarrow{\cos \alpha x = \sin 66^\circ} \cos \alpha x = \cos 24^\circ$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha x = 24^\circ \Rightarrow x = 24^\circ \\ \text{یا} \\ \alpha x = 360^\circ + 24^\circ \Rightarrow x = 4^\circ \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{حاده است } x} \begin{cases} \alpha x = 360^\circ - 24^\circ \Rightarrow x = 4^\circ \\ \text{یا} \\ \alpha x = 720^\circ - 24^\circ \Rightarrow x = 8^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

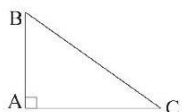
$$\cos 3y + \cos 126^\circ = 0 \Rightarrow \cos 3y + \cos(180^\circ - 54^\circ) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 3y - \cos 54^\circ = 0 \Rightarrow \cos 3y = \cos 54^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{حاده است } y} 3y = 54^\circ \Rightarrow y = 18^\circ$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y - 90^\circ = 30^\circ + 18^\circ - 90^\circ = -60^\circ \Rightarrow \tan(x + y - 90^\circ) = -\tan 60^\circ \\ x + y - 90^\circ = 48^\circ + 18^\circ - 90^\circ = -24^\circ \Rightarrow \tan(x + y - 90^\circ) = -\tan 24^\circ \\ x + y - 90^\circ = 42^\circ + 18^\circ - 90^\circ = -30^\circ \\ \Rightarrow \tan(x + y - 90^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x + y - 90^\circ = 87^\circ + 18^\circ - 90^\circ = 15^\circ \Rightarrow \tan(x + y - 90^\circ) = \tan 15^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

۴ 6 با توجه به شکل زیر داریم:



$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{5}{4} AB \quad (*)$$

$$AC^2 + AB^2 = BC^2 \xrightarrow{(*)} \left(\frac{5}{4}AB\right)^2 + AB^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow \frac{25}{16}AB^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{41}{16}AB^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{41}}{4}AB = BC \quad (**)$$

می‌دانیم:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{(*), (**)} \frac{\frac{5}{4}AB}{\frac{\sqrt{41}}{4}AB} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$$

۳ 1 رادیان $\frac{\pi}{180} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.14} = 57.5^\circ$

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{x}{1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2 \times 3.14} = \frac{1}{6.28} \approx 0.16 = \frac{16}{100}$$

۲ 2 با توجه به کمان‌های متمم، داریم:

$$\tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

پس:

$$\left(x + \frac{\pi}{18}\right) + \left(\frac{2\pi}{9} + x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{9\pi - 4\pi - \pi}{18} = \frac{4\pi}{18} \xrightarrow{+2} x = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$$

از طرفی می‌دانیم که $\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha)$ و $\cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha)$ یعنی اضافه یا کم شدن مضارب π به مقدار α ، تأثیری در محاسبهٔ تانژانت و کتانژانت نمی‌گذارد. چون در گزینه‌ها $\frac{\pi}{9}$ وجود ندارد باید به $\frac{\pi}{9}$ مضارب π را اضافه یا کم کنیم، پس:

$$\frac{\pi}{9} + \pi = \frac{10\pi}{9} \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{9} - \pi = \frac{-8\pi}{9}$$

$$x - y = 3\pi \Rightarrow x = 3\pi + y$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -\sin y \\ \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = \cos(\pi + y) = -\cos y \\ \tan x = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = \tan(\pi + y) = \tan y \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به تساوی‌های بالا، گزینهٔ (۳) صحیح است.

برای نشان دادن نادرستی گزینهٔ (۴) داریم:

$$x = 3\pi + y \xrightarrow{+2} \frac{x}{3} = \pi + \frac{y}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{y}{3}\right) = -\sin \frac{y}{3}$$

۴ 4

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \end{cases}$$

بنابراین نمودار هر دو تابع بر هم منطبق هستند و در نتیجه در بی‌شمار نقطه یکدیگر را قطع می‌کند.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \begin{cases} \angle \rightarrow \begin{cases} \sin \theta < 0, \cos \theta > 0 \\ \sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \Rightarrow \sin \theta - \cos \theta > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0 \Rightarrow \theta$ در ربع چهارم قرار دارد.

2 12

$$30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \Rightarrow 60^\circ \leq 2\alpha \leq 90^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin 2\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{r}}{r} \leq \frac{m-r}{r} \leq 1 \xrightarrow{\times r} \sqrt{r} \leq m-r \leq r$$

$$\xrightarrow{+3} 3 + \sqrt{3} \leq m \leq 5$$

۱۳ ۴ می‌دانیم شیب خط برابر \tan زاویه‌ای است که خط با جهت

مثبت محور X ها می‌سازد، داریم:

$$ry - r\sqrt{r}kx = y \Rightarrow ry = r\sqrt{r}kx + y$$

$$\Rightarrow y = \frac{r\sqrt{r}}{r} kx + \frac{y}{r} \Rightarrow m = \frac{r\sqrt{r}}{r} k$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}k = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

می دانیم $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، پس:

14

$$\cot^2 x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right)$$

$$= \cot^r x - \frac{1}{r} \left(\frac{(1 + \cos x) + (1 - \cos x)}{\underbrace{1 - \cos^r x}_{\sin^r x}} \right)$$

$$= \cot^r x - \frac{1}{r} \left(\frac{r}{\sin^r x} \right) = \frac{\cos^r x}{\sin^r x} - \frac{1}{\sin^r x}$$

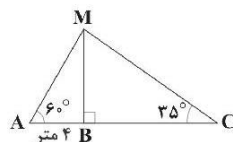
$$= \frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x} = -1$$

15 ۲ با توجه به قضیه سینوس‌ها در محاسبه مساحت داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{r} AB \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{r} r \times \lambda \times \sin \hat{B} = r \sin \hat{B} \\ S(\overset{\Delta}{BED}) = \frac{1}{r} BE \times BD \times \sin \hat{B} = \frac{1}{r} r \times r \times \sin \hat{B} = r \sin \hat{B} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S(ACDE) = S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{BED}) = r \sin \hat{B}$$

$$\frac{S(\text{ACDE})}{S(\text{EDB})} = \frac{r_1 \sin \hat{B}}{r \sin \hat{B}} = \gamma$$



$$\Delta_{ABM} : \cos 90^\circ = \frac{AB}{AM} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{AM} \Rightarrow AM = 8$$

$$\sin 60^\circ = \frac{MB}{AM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MB}{1} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta BMC: \sin 36^\circ = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{MC} \Rightarrow MC = 12$$

$$AM + MC = \lambda + 1\gamma = \gamma.$$

در فاصله $(90^\circ, 45^\circ)$ همواره $\sin x > \cos x$ ۱ ۸

و $\tan x > \cot x$ می باشد، بنابراین داریم:

$$\underbrace{|\sin x - \cos x|}_{\text{مثبت}} = \sin x - \cos x, \underbrace{|\cot x - \tan x|}_{\text{منفي}} = -(\cot x - \tan x)$$

$$\begin{aligned} & \frac{|\sin x - \cos x|}{\cos x} - |\cot x - \tan x| \\ &= \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} - (-(\cot x - \tan x)) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} + \cot x - \tan x$$

$$= \cancel{\tan x} - 1 + \cot x - \cancel{\tan x} = \cot x - 1$$

9 ۲ اگر نقطه $A(a, b)$ روی دایره مثلثاتی قرار داشته باشد،

آنجا که $\sin \theta = b$ و $\cos \theta = a$ است.

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{x+y}{x+y} \\ \cos \theta = \frac{x+1}{x+y} \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \left(\frac{x+y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x+y}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^7 + 7x + 7 + x^7 + 7x + 1}{(x+7)^7} = 1 \Rightarrow 7x^7 + 7x + 8 = x^7 + 7x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

غير قابل قبول $(x = -2 \Rightarrow A(-1, 0))$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \Rightarrow A\left(\frac{r}{\Delta}, \frac{r}{\Delta}\right) \end{array} \right.$$

$$\tan \theta + \cos \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \frac{r}{\frac{r}{\Delta}} + \frac{r}{\Delta} = \frac{r}{r} + \frac{r}{\Delta} = \frac{r\Delta}{\Delta}$$

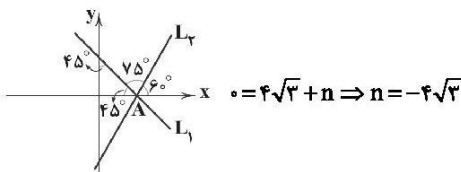
۱۰ ۲ با توجه به این که شیب خط L_4 برابر $\sqrt{3}$ است، پس با محور

$\alpha = 18^\circ - (45^\circ + 6^\circ) = 75^\circ$ xها زاویه 6° می‌سازد. از طرفی داریم:

پس زاویه‌ای که L_1 با محور x ها می‌سازد، 135° است، پس شیب آن برابر ۱-
و در نتیجه $m=1$ است.

مختصات نقطه A را که برابر $(4, 0)$ است، در معادله خط L_4 صدق می‌دهیم

تا n به دست آید:



$$a + \sin^2 x = \sin x \cos x \left(r \frac{\sin x}{\cos x} + b \cos x \right)$$

$$\Rightarrow a + \sin^2 x = r \sin^2 x + b \cos^2 x$$

$$\Rightarrow a + \sin^2 x = r \sin^2 x + b(1 - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow a + \sin^2 x = b + (r - b) \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r - b = 1 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = r \Rightarrow ab = r$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{a \sqrt{r} - 0}{ra - 1} \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{a \sqrt{r}}{ra - 1} \Rightarrow \frac{a}{ra - 1} = 1 \quad 1 \quad 22$$

$$\Rightarrow a^2 = ra - 1 \Rightarrow a^2 - ra + 1 = 0 \Rightarrow a = r \pm \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow \max(a) = r + \sqrt{r}$$

$$23 \quad \text{فرض می‌کنیم } AB = BD = DC = x \text{ باشد.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} x \times 2x \times \frac{\sqrt{r}}{2} = \frac{9\sqrt{r}}{2} \Rightarrow x = r$$

مثلث ABC در راس A قائمه است. پس:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (rx)^2 - x^2 = r^2 x^2 \Rightarrow AC = r\sqrt{r}$$

$$ABC \text{ محیط} = x + 2x + r\sqrt{r} = 9 + r\sqrt{r} = r(r + \sqrt{r})$$

$$1 \quad 24$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = r \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = r \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{r}$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

$$25 \quad \text{عبارت } -P^2 + P - 1 \text{ همواره منفی است، زیرا } \Delta < 0 \text{ و}$$

$$\text{ضریب } P^2 \text{ نیز منفی است. پس } \tan \alpha < 0 \text{ است. از طرفی } 1 - \cos P \leq 1 \text{ و}$$

$$\text{در نتیجه } \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r + \cos P} \leq 1 \text{ است بنابراین } \sin \alpha > 0 \text{ است، } \alpha \text{ در ناحیه}$$

دوم قرار دارد زیرا در آن ناحیه تناؤات منفی و سینوس مثبت است.

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = a \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + b \sin 7\pi = a \cos \frac{3\pi}{2} \quad 26$$

$$= a \cos\left(r\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -a \cos \frac{\pi}{4} = -a \frac{\sqrt{r}}{2}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{r}}{2} \Rightarrow -\frac{a\sqrt{r}}{2} = \frac{\sqrt{r}}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = a \cos \frac{\pi}{4} + b \sin \frac{3\pi}{4} = -b$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = a \cos 2\pi + b \sin \frac{9\pi}{4} = a + b = -1 + 1 = 0$$

$$27 \quad 7 \text{ رادیان در ناحیه اول و } 8 \text{ رادیان در ناحیه دوم قرار دارد.}$$

$$\text{بنابراین } \sin \alpha > 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0 \text{ و } \cos \alpha < 0 \text{ است. ضمناً } \frac{\alpha}{4}$$

برابر 4 رادیان و در ناحیه سوم قرار دارد.

$$-\frac{\sin \alpha \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{4}}{+} > 0$$

$$-\frac{\cot \alpha \tan \frac{\alpha}{4}}{-} > 0$$

$$3 - \tan \alpha > 0$$

$$28 \quad \text{قطرهای مربع بر هم عمودند بنابراین } \widehat{DAE} = 90^\circ \text{ است.}$$

$$\text{پس: } |\widehat{BC}| = 2 \times \frac{\pi}{4} = \pi \text{ بنابراین:}$$

$$|\widehat{BHC}| = 2\pi \times 2 - \pi = 3\pi$$

$$AC = AB = r = 2$$

$$\text{محیط شکل } |\widehat{BHC}| + 2r = 3\pi + 4$$

$$\frac{1}{3} \text{ محیط دایره } = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{2}{14}$$

حال شعاع پیست را می‌یابیم:

$$L = r\theta \Rightarrow 157 = r \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{14} \Rightarrow r = \frac{3 \times 157 \times 14}{2 \times 3} = 75 \text{ متر}$$

$$17 \quad \text{ف می‌دانیم که:}$$

$$\tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

بنابراین:

$$\left(x + \frac{\pi}{15}\right) + \left(\frac{7\pi}{15} + x\right) = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{8\pi}{15} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{15}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{15\pi - 16\pi}{30} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{30}$$

$$\xrightarrow{k=1} 2x = \pi + \frac{\pi}{30} \Rightarrow 2x = \frac{31\pi}{30} \Rightarrow x = \frac{31\pi}{60}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{x(-2)} 3 \geq -2 \cos x \geq -3$$

$$\xrightarrow{+1} 4 \geq 1 - 2 \cos x \geq -2$$

$$\Rightarrow 4 \geq y \geq -2 \Rightarrow R_f = [-2, 4]$$

$$18 \quad 4$$

$$19 \quad 1 \text{ با توجه به شکل داریم:}$$

$$f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = 1 \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow a + b \sin(2\pi) = 1$$

$$\Rightarrow a + b \times 0 = 1 \Rightarrow a = 1 \quad (*)$$

از طرفی:

$$f(0) = \frac{3}{4} \xrightarrow{(*)} 1 + b \sin\left(0 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow b\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a + b = 0$$

$$20 \quad 3$$

$$\tan \frac{14\pi}{15} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) = -\tan \frac{\pi}{15} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{15} + \tan \frac{14\pi}{15} = 0$$

$$\tan \frac{12\pi}{15} = \tan\left(\pi - \frac{3\pi}{15}\right) = -\tan \frac{3\pi}{15} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{15} + \tan \frac{12\pi}{15} = 0$$

لذا از عبارت مورد نظر فقط $\tan \frac{5\pi}{15}$ باقی می‌ماند:

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \tan \frac{5\pi}{15} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\Delta \tan^2 x - 7 \tan x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{12}{\Delta} \end{cases}$$

چون x در ناحیه چهارم است پس $\tan x < 0$ است، بنابراین $\tan x = -1$ قابل قبول خواهد بود پس $x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ است.

$$\sin x = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1 \leq \cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$\xrightarrow{+3} 2 \leq 3 - \cos(x + \frac{\pi}{4}) \leq 4$$

$$\xrightarrow{\text{عکس}} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \cos(x + \frac{\pi}{4})} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{3 - \cos(x + \frac{\pi}{4})} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow \min(y) = -\frac{1}{4}$$

$$\sin 46^\circ = \sin(36^\circ + 9^\circ + 1^\circ) = \sin(9^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\cos 37^\circ = \cos(36^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\sin 19^\circ = \sin(18^\circ + 1^\circ) = -\sin 1^\circ$$

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\cos 1^\circ + 2 \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ + 3 \sin 1^\circ} = 2 \Rightarrow \frac{\cos 1^\circ + 2 \sin 1^\circ}{3 \cos 1^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \tan 1^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan 1^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$\frac{\sin \alpha + 5 \cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \Rightarrow \sin \alpha + 5 \cos \alpha = -2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{3}$$

$$\cot(\frac{1}{3}\pi + \alpha) = \cot(\Delta\pi + \frac{\pi}{3} + \alpha) = \cot(\frac{\pi}{3} + \alpha) = -\tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$2x + 2x = \Delta x = \Delta \times \frac{\pi}{\Delta} = \pi \Rightarrow \sin 2x = \sin 2x$$

$$\frac{x}{2} + 2x = \frac{\Delta}{2}x = \frac{\Delta}{2} \times \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \sin 2x$$

$$f(\frac{\pi}{\Delta}) = 1 + 2 = 3$$

مکمل α برابر $\pi - \alpha$ و متمم α برابر $\frac{\pi}{2} - \alpha$ است.

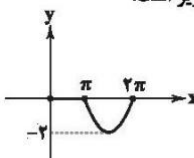
$$\pi - \alpha = \Delta(\frac{\pi}{2} - \alpha) \Rightarrow \pi - \alpha = \frac{\Delta\pi}{2} - \Delta\alpha$$

$$\Rightarrow 4\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow |\sin x| = \sin x \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\pi < x \leq 2\pi \Rightarrow |\sin x| = -\sin x \Rightarrow f(x) = 2 \sin x$$

بنابراین نمودار تابع $y = \sin x - |\sin x|$ به صورت زیر است.



$$a + \sin^2 x = \sin x \cos x \left(r \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\sin x} \right)$$

$$\Rightarrow a + \sin^2 x = r \sin^2 x + b \cos^2 x$$

$$\Rightarrow a + \sin^2 x = r \sin^2 x + b(1 - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow a + \sin^2 x = b + (r - b) \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r - b = 1 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = r \Rightarrow ab = r$$

$$\tan(6^\circ) = \frac{a^2 \sqrt{r} - 1}{ra - 1} \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{a^2 \sqrt{r}}{ra - 1} \Rightarrow \frac{a^2}{ra - 1} = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = ra - 1 \Rightarrow a^2 - ra + 1 = 0 \Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow \max(a) = 2 + \sqrt{r}$$

فرض می‌کنیم $AB = BD = DC = x$ باشد. ۴۴

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} x \times 2x \times \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{9\sqrt{r}}{r} \Rightarrow x = 3$$

مثلث ABC در راس A قائمه است. پس:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (2x)^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow AC = 3\sqrt{r}$$

$$ABC \text{ محیط} = x + 2x + 3\sqrt{r} = 9 + 3\sqrt{r} = 3(3 + \sqrt{r})$$

۴۵

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

عبارت $-P^2 + P - 1$ همواره منفی است، زیرا $\Delta < 0$ و

ضریب P^2 نیز منفی است. پس $\tan \alpha < 0$ است. از طرفی $-1 \leq \cos P \leq 1$ و

در نتیجه $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos P} \leq 1$ است بنابراین $\sin \alpha > 0$ است، α در ناحیه

دوم قرار دارد زیرا در آن ناحیه تانژانت منفی و سینوس مثبت است.

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = a \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + b \sin 7\pi = a \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$= a \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -a \cos \frac{\pi}{2} = -a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = a \cos \frac{\pi}{4} + b \sin \frac{3\pi}{4} = -b$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = a \cos 2\pi + b \sin \frac{9\pi}{4} = a + b = -1 + 1 = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = 2|a| = 6 \Rightarrow |a| = 3$$

$$\max f(x) = a^2 + |a| = 9 + 3 = 12$$

دامنه تابع f را حساب می‌کنیم: ۳۷

$$\frac{2\pi}{x} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2}{x} \neq \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4} \Rightarrow x \neq \frac{4}{2k+1}$$

با توجه به گزینه‌ها عدد $\frac{4}{19}$ در دامنه تابع f قرار ندارد.

چون $\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}$ است، پس $\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{2}$ خواهد بود. ۳۸

$$\tan 2x > 1 \Rightarrow \frac{2}{1-m} > 1 \Rightarrow \frac{2}{1-m} - 1 > 0$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{2-1+m}{1-m} > 0 \Rightarrow \frac{m+1}{1-m} > 0 \Rightarrow -1 < m < 1$$

طبق نمودار $f(0) = -1$ است و \max تابع برابر ۲ می‌باشد. ۳۹

$$f(0) = b = -1$$

$$\max f(x) = |a| - 1 = 2 \Rightarrow |a| = 3$$

اگر انتقال عمودی را حذف کنیم تابع $(a \sin x)$ از $x = 0$ به بعد صعودی
اکید است، پس $a > 0$ خواهد بود. بنابراین: $a = 3$

$$x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = 3 \sin \frac{5\pi}{6} - 1 = 3 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{|k|} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow |k| = 12 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(\cos 12x + 144) \quad ۴۰$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12} \cos 12x + 12 \Rightarrow \begin{cases} \max f(x) = 12 + \frac{1}{12} \\ \min f(x) = 12 - \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\max f(x) - \min f(x) = \left(12 + \frac{1}{12}\right) - \left(12 - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}$$

بررسی گزینه‌ها: ۴۱

(۱) رادیان در ناحیه دوم قرار دارد و $\sin 2 > \tan 2$ است.

(۲) رادیان در ناحیه سوم قرار دارد و $\tan 4 > \sin 4$ است.

(۳) رادیان در ناحیه چهارم قرار دارد و $\tan 6 < \sin 6$ است.

(۴) رادیان در ناحیه اول است، بنابراین $\tan \sqrt{2} > \sin \sqrt{2}$ است.

$$3x + 2x = 5x = 5 \times \frac{\pi}{\Delta} = \pi \Rightarrow \sin 3x = \sin 2x$$

$$\frac{x}{\gamma} + 2x = \frac{5}{\gamma}x = \frac{5}{\gamma} \times \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow \cos \frac{x}{\gamma} = \sin 2x$$

$$f\left(\frac{\pi}{\Delta}\right) = 1 + 2 = 4$$

۲ ۵۵ مکمل α برابر $\pi - \alpha$ و متمم α برابر $\frac{\pi}{2} - \alpha$ است.

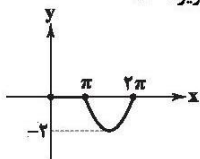
$$\pi - \alpha = \Delta\left(\frac{\pi}{\gamma} - \alpha\right) \Rightarrow \pi - \alpha = \frac{\Delta\pi}{\gamma} - \Delta\alpha$$

$$\Rightarrow 4\alpha = \frac{3\pi}{\gamma} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3\pi}{16}$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow |\sin x| = \sin x \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\pi < x \leq 2\pi \Rightarrow |\sin x| = -\sin x \Rightarrow f(x) = 2\sin x$$

بنابراین نمودار تابع $y = \sin x - |\sin x|$ به صورت زیر است.



$$3(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} 9(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x) = 2$$

$$\Rightarrow 9(1 + \sin 2x) = 2 \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{2}{9} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{7}{9}$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81} = \frac{32}{81}$$

$$8\sin x \cos x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 8 \times \frac{1}{2} \sin 2x \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 4 \times \frac{1}{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{4} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$2\cos x = \frac{2 + \tan^2 x - 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow 2\cos x = \cos^2 x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \end{cases}$$

ریشه به دست آمده قابل قبول نیست چون $\tan x$ در آن تعریف نمی‌شود.

۱ ۴۸ ۷ رادیان در ناحیه اول و ۸ رادیان در ناحیه دوم قرار دارد.

بنابراین $\frac{\alpha}{\gamma}$ برابر ۴ رادیان و در ناحیه سوم قرار دارد.

$$-\frac{\sin \alpha \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{\gamma}}{+ \frac{+}{-}} > 0$$

$$-\frac{\cot \alpha \tan \gamma}{- \frac{+}{-}} > 0$$

$$3 - \frac{\tan \alpha}{-} > 0$$

۴ ۴۹ قطرهای مربع بر هم عمودند بنابراین $\widehat{DAE} = 90^\circ$ است.

پس: $|\widehat{BC}| = 2 \times \frac{\pi}{\gamma} = \pi$ بنابراین:

$$|\widehat{BHC}| = 2\pi \times 2 - \pi = 3\pi$$

$$AC = AB = r = 2$$

$$\text{محیط شکل} = |\widehat{BHC}| + 2r = 3\pi + 4$$

$$\Delta \tan^2 x - 7 \tan x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{12}{\Delta} \end{cases}$$

چون x در ناحیه چهارم است پس $\tan x < 0$ است، بنابراین $\tan x = -1$ قابل قبول خواهد بود پس $x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ است.

$$\sin x = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\xrightarrow{+2} 2 \leq 3 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 4$$

$$\xrightarrow{\text{عکس}} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{3 - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow \min(y) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 46^\circ = \sin(36^\circ + 9^\circ + 1^\circ) = \sin(9^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\cos 37^\circ = \cos(36^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\sin 19^\circ = \sin(18^\circ + 1^\circ) = -\sin 1^\circ$$

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\cos 1^\circ + 2\cos 1^\circ}{\cos 1^\circ + 3\sin 1^\circ} = 2 \Rightarrow \frac{\cos 1^\circ + 3\sin 1^\circ}{3\cos 1^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \tan 1^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan 1^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$\frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \Rightarrow \sin \alpha + 2\cos \alpha = -2\sin \alpha + 2\cos \alpha$$

$$\Rightarrow 3\sin \alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\cot\left(\frac{1}{3}\pi + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha = \frac{2}{3}$$

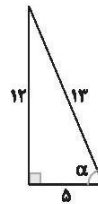
۶۰ با توجه به توضیحات سوال، تابع $f(x)$ متناوب است و دوره

تناوب آن برابر ۱ است. پس:

$$f(20) = f(21) = f(18) = f(17) = a$$

$$A = \frac{a+a}{2a-a} = \frac{2a}{2a} = 1$$

۶۱ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حاده α در نظر می‌گیریم.



$$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$13 \sin 2\alpha + \cos(\pi - \alpha) = 26 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 26 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} - \frac{5}{13} = \frac{120}{13} - \frac{5}{13} = \frac{115}{13}$$

۶۲

$$f(x) = \frac{-\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}{1 + \sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)}{1 + \sin^2 x}$$

$$= -\sin^2 x \cos^2 x = -(\sin x \cos x)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4}$$

۶۳ طبق شکل $T(2 + \frac{1}{4})$ برابر $\frac{1}{10}$ است.

$$\frac{9}{4} T = \frac{1}{10} \Rightarrow T = \frac{4}{90} \Rightarrow \frac{2\pi}{45} = \frac{2}{45} \Rightarrow |b| = 45\pi$$

$$\text{Max} f(x) = \frac{1}{20} \Rightarrow |a| = \frac{1}{20}$$

a و b هم‌علامتند، بنابراین تابع f به صورت $f(x) = \frac{1}{20} \sin(45\pi x)$ تبدیل می‌شود.

$$f\left(\frac{1}{90}\right) = \frac{1}{20} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{20} = 0.05$$

۶۴

$$y = \frac{1}{(\tan x + \cot x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2} = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$y = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۶۵

$$\max y = T \Rightarrow |a| = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow a^2 = 2\pi \xrightarrow{a>0} a = \sqrt{2\pi}$$

$$\min v = -a = -\sqrt{2\pi}$$

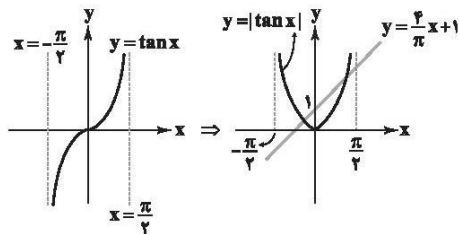
۶۶

$$3 \tan x - \cot x = 0 \Rightarrow 3 \tan x = \cot x$$

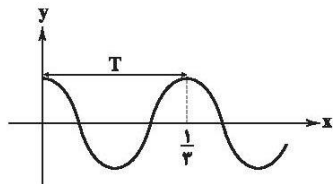
$$\Rightarrow \tan^3 x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

زاویه مورد قبول معادله بالا در ناحیه دوم و $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ یعنی $\frac{5\pi}{6}$ است.

۶۷ دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند.



۶۸ فاصله هر دو ماکزیمم متوالی، دوره تناوب است.



$$T = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|p|} = \frac{1}{3} \Rightarrow |p| = 6\pi$$

۶۹

$$\max f(x) = 3 \times \min f(x) \Rightarrow a + 3 = 3(a - 2)$$

$$\Rightarrow a + 3 = 3a - 6 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = 2|a| = 12$$

۷۰

$$-\cos(\delta\pi + \delta x) = \sin(2\pi - x) \Rightarrow \cos \delta x = \sin x$$

$$\Rightarrow \cos \delta x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} \delta x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ \delta x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(2k+1) \\ x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(2k-1) \end{cases}$$

به ازای $k=7$ دو جواب $\frac{29\pi}{4}$ و $\frac{27\pi}{4}$ به دست می‌آید.

۷۱ ماکزیمم تابع برابر ۳ است.

$$3 \cos^2 x = 3 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

جواب‌های قابل قبول در بازه داده شده $\{0, \pi, 2\pi\}$ است. پس در سه نقطه، تابع ماکزیمم می‌شود.

۱ ۷۶

$$B = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 - (\tan^2 x + 2)^2 = (1 + \tan^2 x)^2 - (\tan^2 x + 2)^2$$

$$B = 1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x - (\tan^4 x + 4\tan^2 x + 4)$$

$$B = -2\tan^2 x - 3 = -(2\tan^2 x + 3)$$

۲ ۷۷

$$(\tan^2 x + 3\tan^2 x) + (\tan x + 3) = 0$$

$$\tan^2 x(\tan x + 3) + (\tan x + 3) = 0$$

$$(\tan x + 3)(\tan^2 x + 1) = 0 \Rightarrow \tan x = -3 < 0$$

$$(1 + \cos^2 \alpha)\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{1 + \cos^2 \alpha} > 0$$

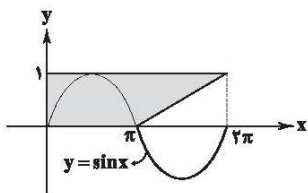
چون $\tan x < 0$ و $\sin x > 0$ است پس x در ناحیه دوم قرار دارد.

۲ ۷۸

$$f(\pi) = \sin\left(\Delta\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{6} + 2\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

سطح داده شده با سطح زیر برابر است.



شکل حاصل ذوزنقه است.

$$S = \frac{1}{2}(\pi + 2\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

مجموع کمان‌ها برابر 36° است بنابراین هر کمان 72°

۳ ۸۰

خواهد بود.

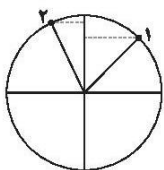
$$\frac{72}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{5}$$

کمان ACB روبه‌رو به زاویه 144° یا $\left(\frac{4\pi}{5}\right)^{\text{rad}}$ خواهد بود.

$$|\widehat{ACB}| = 3 \times \frac{4\pi}{5} = \frac{12\pi}{5}$$

ابتدا مقایسه $\sin 1$ و $\sin 2$ را ببینید:

۳ ۸۱



ملاحظه می‌کنید که $0 < \sin 1 < \sin 2 < 1$ است. بنابراین:

$$0 < \frac{\sin 1}{\sin 2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{\sin 1}{\sin 2}\right] = 0, -1 < \frac{-\sin 1}{\sin 2} < 0 \Rightarrow \left[\frac{-\sin 1}{\sin 2}\right] = -1$$

پس حاصل عبارت برابر ۱ خواهد بود.

۲ ۷۲

$$r \sin^2 x + r \cos^2 x + \cos^2 x = 2/r$$

$$\Rightarrow r + \cos^2 x = 2/r \Rightarrow \cos^2 x = 0/r$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{0/r} = \Delta \Rightarrow \tan^2 x = \Delta$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = 16 \Rightarrow \cos^2 x + \tan^2 x = 0/2 + 16 = 16/2$$

۳ ۷۳

$$\tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 2 = 0 \Rightarrow (\tan \theta + 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan \theta = -1$$

$$A = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \xrightarrow{+\cos \theta} A = \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

۴ ۷۴

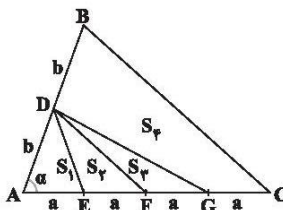
$$\cot \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \xrightarrow{-1 \leq \cos \alpha \leq 1} \cos \alpha = \frac{\sqrt{\Delta} - 1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha = \frac{6 - 2\sqrt{\Delta}}{2} = 3 - \sqrt{\Delta}$$

۳ ۷۵



$$S_1 = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2a \times b \sin \alpha = ab \sin \alpha \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \times 2a \times b \times \sin \alpha = \frac{3}{2} ab \sin \alpha$$

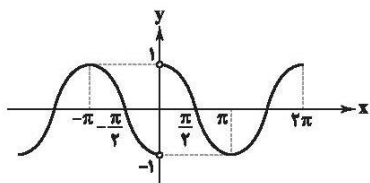
$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b \sin \alpha = 2ab \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{\Delta}{2} ab \sin \alpha$$

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{\frac{\Delta}{2} ab \sin \alpha}{\frac{1}{2} ab \sin \alpha} = \Delta$$

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow f(x) = \cos x \\ x < 0 \Rightarrow f(x) = -\cos x \end{cases}$$

بنابراین نمودار $f(x)$ به صورت زیر است.



با توجه به نمودار، تابع $f(x)$ در مجموعه نقاط $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$

یک‌به‌یک است.

$$\sqrt{3a+1} + |a| = 3 \Rightarrow \sqrt{3a+1} = 3 - |a|$$

$$\xrightarrow{a \geq 0} \sqrt{3a+1} = 3 - a \Rightarrow 3a+1 = 9 - 6a + a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 9a + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{قق } a=1 \\ \text{غقق } a=8 \end{cases}$$

$$a=1 \Rightarrow f(x) = 2 + \sin \frac{x}{2} \Rightarrow T = 4\pi$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{\sin \frac{x}{2}}\right)^{-1} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{1} = \pi \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{x}{2}) \Rightarrow T_g = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

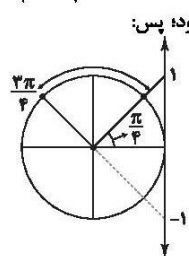
$$f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} - cx\right) = a - b \cos(cx)$$

$$\begin{cases} \text{Max } f(x) = a + |b| = 7 \\ \text{Min } f(x) = a - |b| = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 3, |b| = 4$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow a - b = -1 \Rightarrow 3 - b = -1 \Rightarrow b = 4$$

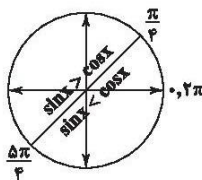
$$\Rightarrow ab + b = 3 \times 4 + 4 = 16$$

$$\frac{3\pi}{4} \text{ تا } \frac{\pi}{4} \text{ با توجه به دایره مثلثاتی و محور تناوبت اگر } x \text{ تغییر کند آن‌گاه } \tan x > 1 \text{ یا } \tan x < -1 \text{ خواهد بود؛ پس:}$$



$$\begin{cases} 1 - m > 1 \Rightarrow m < 0 \\ 1 - m < -1 \Rightarrow m > 2 \end{cases} \Rightarrow m \in \mathbb{R} - [0, 2]$$

با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مقایسه $\sin x$ و $\cos x$ را ببینید.



برای محاسبه دامنه تابع داده شده داریم:

$$\cos x - \sin x > 0 \Rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\sin^2 x = 1 \Rightarrow y = \frac{f}{3+1} = 1 = \min(y)$$

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{f+0} = \frac{1}{f} = \max(t)$$

$$\min(y) - \max(t) = \frac{3}{f}$$

مختصات نقطه B را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_B = \cos(18^\circ + 3^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_B = \sin(18^\circ + 3^\circ) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

نقطه C هم به صورت $C(0, -1)$ است. حال شیب خط گذرا از B و C را حساب می‌کنیم.

$$m_{BC} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC: y + 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\xrightarrow{y=0} x = -\sqrt{3}$$

بنابراین خط گذرا از B و C محور x را در $-\sqrt{3}$ قطع می‌کند.

$$A = \cos(2 \times 36^\circ + 30^\circ) \sin(2 \times 36^\circ + 15^\circ)$$

$$+ \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos(27^\circ + 30^\circ) \sin(18^\circ - 30^\circ) + \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \sin 3^\circ \sin 3^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\sin \alpha = m, \cos \alpha = \frac{f}{\delta}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow m^2 + \frac{16}{25} = 1 \xrightarrow{m < 0} m = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$A = m \tan^2 \alpha + \cot(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5} \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \cot \alpha$$

$$= -\frac{3}{5} \times \frac{9}{16} + \frac{4}{3} = \frac{-11 + 220}{240} = \frac{229}{240}$$

$$\cos x - \cos x \sin^2 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos x (1 - \sin^2 x) = \frac{1}{\lambda} \quad ۲ \quad ۹۲$$

$$\Rightarrow \cos x \cos^2 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} = \cos \frac{\pi}{3}$$

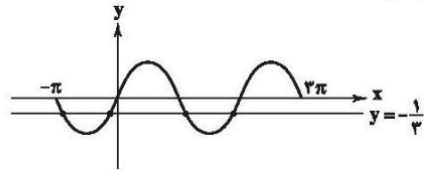
$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

معادله را تجزیه می‌کنیم: ۲ ۹۳

$$3 \sin^2 x - \Delta \sin x - 2 = 0 \Rightarrow (3 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \text{ (فاقد جواب حقیقی)} \\ \sin x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

برای یافتن تعداد جواب‌های معادله $\sin x = -\frac{1}{3}$ ، نمودار دو تابع $y = \sin x$ و $y = -\frac{1}{3}$ را رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌کنید که چهار برخورد یعنی ۴ ریشه حقیقی دارد.

$$\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \Delta \Rightarrow \Delta \sin x + \Delta \cos x = \sin x \quad ۳ \quad ۹۴$$

$$\Rightarrow \Delta \sin x = -\Delta \cos x \Rightarrow \tan x = -\frac{\Delta}{\Delta}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}} = \sqrt{\frac{\sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x| = \frac{\Delta}{\Delta}$$